Gabarito da 1.ª Prova de PMA5633 - Introdução à Álgebra Linear

Prof. Wagner - 20 de setembro de 2019

1.ª Questão: (valor 3.0): Determine os valores da constante $k \in \mathbb{R}$, para que o sistema linear abaixo

$$\begin{cases} x + y + k\,z = 2 \\ 3\,x + 4\,y + 2\,z = k \\ 2\,x + 3\,y - z = 1 \end{cases} \tag{1}$$

tenha:

1. solução única;
2. mais de uma solução;
3. nenhuma solução.

Resolução:

Notemos que a matriz aumentada associada ao sistema linear (1) é dada por:

$$(A\ b) \doteq \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 2 \\ 3 & 4 & 2 & k \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

onde

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\text{e} \qquad b \doteq \begin{pmatrix} 2 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Do item 1. :

Por um resultado (veja Teorema 3.7.1, página 86 das notas) temos que o sistema linear não homogêneo (1), adimitrá única solução se, e somente se, a matriz A for inversível, ou seja, $\det(A) \neq 0$.

Logo, deveremos ter

$$\begin{aligned} 0 &\neq \det(A) \\ &\overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -4 + 4 + 9\,k - 8\,k - 6 + 3 \\ &= k - 3\,, \\ \text{ou seja,} \qquad & k \neq 3\,. \end{aligned}$$

Portanto sistema linear não homogêneo (1), adimitrá única solução se, e somente se,

$$k \neq 3\,.$$

Do item 2. :

Do item a) acima deveremos ter

$$k = 3\,,$$

pois, caso contrário o sistema linear não homogêneo (1) admitirá **única** solução, logo será consistente.

Por um resultado (veja Teorema 3.5.2, página 75 das notas) temos que o sistema linear não homogêneo (1), será consistente se, e somente se,

$$\operatorname{rank}(A\ b) = \operatorname{rank}(A)\,.$$

Como consequência o o sistema linear não homogêneo (1), será consistente se, e somente se,

$$\operatorname{rank}(A\ b) \neq \operatorname{rank}(A)\,.$$

Encontremos a forma escalonada reduzida por linhas associada à matriz aumentada $(A\ b)$.

Para tanto notemos que

$$\begin{aligned}
(A\ b) &\overset{(2),\ \text{com}\ k=3}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\overset{3.a-2\times 1.a}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \end{pmatrix} \\
&\overset{2.a-3\times 1.a}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \end{pmatrix} \\
&\overset{1.a-2.a}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -10 & 5 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \end{pmatrix} \\
&\overset{3.a-2.a}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,.
\end{aligned} \tag{5}$$

Notemos que, de (5), segue também que

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\operatorname{rank}(A\ b) &\overset{(5)}{=} 2 \\
&\overset{(6)}{=} \operatorname{rank}(A)\,,
\end{aligned} \tag{7}$$

mostrando que o sistema linear não homogêneo (1) será sempre consistente.

Portanto do fato acima e do item a), segue que se

$$k = 3$$

o sistema linear não homogêneo (1) admitirá mais de uma solução.

<u>**Do item3. :**</u>

Dos itens a) e b) acima, segue que não existe $k \in \mathbb{R}$, de modo que o sistema linear não homogêneo (1) não admite solução.

2.ª Questão: (valor 3,0): Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

1. A é uma matriz não singular (ou seja, inversível);
2. posto da matriz A é igual a $\underline{n}$, ou seja,
$$\operatorname{rank}(A) = n ; \tag{8}$$
3. $A \sim I_n$, isto é,
$$A_R = I_n , \tag{9}$$
onde a matriz A_R é a FERL associada a matriz A.

Resolução:

<u>**Mostremos que se 1. ocorre, então 2. ocorrerá:**</u>

Se a matriz $A \in M_n$ é uma matriz não singular e $u \in M_{n1}$ é uma solução de

$$A \cdot u = O_{n1} , \tag{10}$$
$$\text{então} \quad u \doteq A^{-1} \cdot O_{n1} = O_{n1} ,$$

isto é, a única solução da equação matricial (10) é a solução trivial $u = O_{n1}$.

Logo de um resultado (veja o Corolário 3.4.1 da página 83 das notas), segue que o posto da matriz A dever ser igual a $\underline{n}$, mostrando a validade de 2. .

<u>**Mostremos que se 2. ocorre, então 3. ocorrerá:**</u>

Se vale (8), ou seja, se o posto da matriz A é igual a $\underline{n}$ então, pela definição de posto de uma matriz, segue que não existem linhas nulas na matriz A_R (a FERL associada a matriz A).

Além disso, cada linha de $A_R \in M_n$, tem coeficiente líder 1 e zero nas outras posições da coluna, isto é,

$$A_R = I_n ,$$

mostrando a validade de 3. .

<u>**Mostremos que se 3. ocorre, então 1. ocorrerá:**</u>

Se vale (9), ou seja,

$$A_R = I_n ,$$

então, como $A \sim A_R$, da definição de $\sim$, podemos encontrar uma matriz quadrada $P \in M_n$, não singular, tal que

$$I_n = A_R = P \cdot A .$$

Portanto a matriz A é uma matriz não singular e

$$A^{-1} = P , \tag{11}$$

completando a demonstração do item 1. .

3.ª Questão: (valor 1,5): A diferença entre dois números reais é 14 e o triplo do maior deles é igual ao quádruplo do menor. Determine o valor dos dois números reais.

Resolução:

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ os números procurados, de modo que

$$y < x.$$

Logo, eles devem satisfazer:

$$\begin{cases} x - y = 14 \\ 3\,x = 4\,y \end{cases}$$

$$\text{ou seja,} \quad \begin{cases} x - y = 14 \\ 3\,x - 4\,y = 0 \end{cases}$$

$$\text{cuja solução será (exercício):} \quad \begin{cases} x = 56 \\ y = 42 \end{cases}, \tag{12}$$

completando a resolução.

4.^{a} Questão: (valor 1.0): Em cada um dos itens abaixo, diga se a afirmação é **V**erdadeira ou **F**alsa, justificando sua resposta.

1. ( ) Suponhamos que um sistema linear seja consistente (ou seja, admita solução) e a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{13}$$

está associada ao sistema linear .

Então a matriz acima é a matriz aumentada do sistema linear.

2. ( ) A matriz

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 12 & 14 & 16 & 18 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{pmatrix} \tag{14}$$

não é inversível.

3. ( ) O sistema linear homôgeneo

$$\begin{cases} x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 = 0 \\ 4\,x_1 + x_2 + 8\,x_3 = 0 \\ -x_1 - 2\,x_2 - 3\,x_3 = 0 \end{cases} \tag{15}$$

admite solução não trivial.

$\boxed{\textbf{Resolução:}}$

Do item 1. :

A afirmação é falsa.

Pois se a matriz (13) fosse a matriz aumentada de um sistema linear este deveria ser não homogêneo, ou seja,

$$(A\ b) \doteq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

$$\text{onde} \qquad A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

$$\text{e} \qquad b \doteq \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Notemos que

$$(A\ b) \overset{(16)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{2.a-2\times 1.a}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{3.a-1.a}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\overset{\text{troque a 2.a com a 3.a}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \overset{(-\frac{1}{2})\times 3.a}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{(-1)\times 2.a}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\overset{1.a-4\times 3.a}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{2.a-2\times 3.a}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{1.a-2\times 2.a}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Notemos que, da situação acima segue que

$$A \overset{(17)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{(19)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Portanto

$$\operatorname{rank}(A\ b) \overset{(19)}{=} 3$$
$$\text{e} \qquad \operatorname{rank}(A) \overset{(20)}{=} 2.$$

Logo, de um resultado (veja o Teorema 3.5.2, da página 75 das notas), segue que a equação matricial não homogênea $A \cdot x = b$ não será consistente, ou ainda, o sistema linear não homogêneo associado não será consistente, contrariando a hipótese.

Portanto o a matriz dada (13) não é matriz aumentada associada a um sistema linear não homogêneo.

Do item 2. :

A afirmação é verdadeira, pois

$$A \overset{(14)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 12 & 14 & 16 & 18 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{pmatrix} \overset{3.a-2\times 2.a}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Como a matriz (21) tem uma linha inteira nula, seu determinate será igual a zero, em particular,

$$\det(A) = 0\,.$$

Logo, por um resultado (veja Teorema 3.7.1, da página 86 das notas), segue que a matriz A não será inversível.

Do item 3. :

A afirmação é verdadeira.

Notemos que a matriz dos coeficientes do sistema linear homogêneo (15) é dada por:

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \tag{22}$$

Como

$$A \overset{(23)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\overset{3.a+1.a}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

segue que

$$\det(A) = 0$$

portanto de uma resultado (veja Teorema 3.7.1, da página 86 das notas), segue que o sistema linear homogêneo possui soluções não triviais.

5.ª Questão: (valor 2,0) Seja

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

1. encontre a forma escalonada reduzida por linhas associada à matriz A;

2. se a matriz A é a matriz aumentada associada a um sistema linear não homogêneo, encontre o conjunto solução associado ao mesmo.

Resolução:

Do item 1. :

Notemos que

$$A \overset{(23)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{2.a+1.a}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{3.a-5\times 1.a}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -6 & -12 & -18 & -24 \end{pmatrix}$$

$$\overset{3.a+2\times 2.a}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -8 & -8 & -16 \end{pmatrix} \overset{-\frac{1}{8}\times 3.a}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{2.a-2\times 3.a}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{1.a-3\times 3.a}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{3}\times 2.a}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{1.a-2\times 2.a}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

logo esta será a forma escalonada reduzida por linhas associada a matriz A, ou seja,

$$A_R \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{24}$$

<u>Do item 2. :</u>

Logo sistema linear não homogêneo (23) é equivalente ao sistema linear não homogêneo associado a matriz (24), isto é,

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + (-1) \cdot x_4 = -1 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 = 0 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\text{ou seja,} \quad \begin{cases} x_1 - x_4 = -1 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\text{ou ainda} \quad \begin{cases} x_1 = -1 + x_4 \\ x_2 = -x_4 \\ x_3 = 2 - x_4 \end{cases}, \tag{25}$$

para cada $x_4 \in \mathbb{R}$.

Portanto de (25), segue que, o conjunto solução ao sistema linear não homogêneo associado a matriz (23) será dada por

$$S \doteq \left\{(-1 + x_4\,, -x_4\,, 2 - x_4\,, x_4) \in \mathbb{R}^4;\ \text{ para }\ x_4 \in \mathbb{R}\right\}.$$

F I M