Gabarito da 2.ª Prova de PMA5633 - Introdução à Álgebra Linear

Prof. Wagner - 6 de dezembro de 2019

1.ª Questão: (valor 3.0): Sejam $(U, +, \cdot)$ e $(V, +, \cdot)$ espaços vetoriais reais (ou complexos) e $T : U \to V$ uma transformação linear.

Suponhamos que

$$\dim(U) = n < \infty \,. \tag{1}$$

$$\text{Mostre que:} \qquad \dim(U) = \dim[\mathcal{N}(T)] + \dim[T(U)] \,. \tag{2}$$

Resolução:

Do Corolário 1.2.5.2 (página 322 das notas de aula), temos que

$$\mathcal{N}(T)$$

é subespaço vetorial de $(U, +, \cdot)$.

$$\text{Além disso, como} \qquad \dim(U) = n < \infty \,,$$

$$\text{segue, do Corolácio 9.2.1 (página 228 das notas de aula) que} \qquad p \doteq \dim[\mathcal{N}(T)] \leq n < \infty \,. \tag{3}$$

Consideremos primeiramente o caso

$$p = 0 \,,$$

$$\text{isto é,} \qquad \mathcal{N}(T) = \{O\} \,. \tag{4}$$

Como, por hipótese,

$$\dim(U) = n < \infty \,,$$

segue que podemos encontrar um conjunto de vetores

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1 \,, u_2 \,, \cdots \,, u_n\} \tag{5}$$

que é uma base (ordenada) de $(U, +, \cdot)$.

Afirmamos que o conjunto

$$\mathcal{C} \doteq \{T(u_1) \,, T(u_2) \,, \cdots \,, T(u_n)\} \tag{6}$$

formam uma base (ordenada) do subespaço vetorial $T(U)$ (veja o item 1. da Proposição 12.5.2, da página 321 das notas de aula), do espaço vetorial real (ou complexo) $(V, +, \cdot)$.

De fato, se $w \in T(U)$, da Definição de $T(U)$ (veja o item 1. da Definição 12.5.1, da página 319 das notas de aula), podemos encontrar

$$u \in U \,,$$

$$\text{de modo que} \qquad T(u) = w \,. \tag{7}$$

Como o conjunto $\mathcal{B}$ é uma base (ordenada) de $(U, +, \cdot)$, segue que podemos encontrar escalares

$$\alpha_1 \,, \alpha_2 \,, \cdots \,, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) \,,$$

$$\text{tais que} \qquad u = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n \,. \tag{8}$$

Logo

$$
\begin{aligned}
w &= T(u) \\
&\overset{(8)}{=} T(\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n) \\
&\overset{\text{T é transformação linear e temos (??)}}{=} \alpha_1 \cdot T(u_1) + \alpha_2 \cdot T(u_2) + \cdots + \alpha_n \cdot T(u_n)\,,
\end{aligned}
$$

ou seja, $w \in [T(u_1)\,, T(u_2)\,, \cdots, T(u_n)]\,,$

ou ainda, $T(U) = [T(u_1)\,, T(u_2)\,, \cdots, T(u_n)]\,.$

Portanto o conjunto de vetores $\mathcal{C}$, dado por (6), gera o subespaço vetorial $(T(U)\,, +\,, \cdot)$.

Mostremos que o conjunto de vetores $\mathcal{C}$, dado por (6), é L.I. em $(V\,, +\,, \cdot)$.

Para isto, notemos que,

se $\alpha_1\,, \alpha_2\,, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$),

são tais que

$$
\begin{aligned}
O &= \alpha_1 \cdot T(u_1) + \alpha_2 \cdot T(u_2) + \cdots + \alpha_n \cdot T(u_n) \\
&\overset{\text{T é transformação linear e temos (??)}}{=} T(\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + + \cdots + \alpha_n \cdot u_n)\,,
\end{aligned}
$$

teremos: $(\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n) \in \mathcal{N}(T) \overset{(4)}{=} \{O\}$,

isto é, $\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n = O\,.$

Como o conjunto de vetores

$$\mathcal{B} = \{u_1\,, u_2\,, \cdots, u_n\}$$

é L.I. em $(U\,, +\,, \cdot)$ (pois, de (5), é uma base (ordenada) de $(U\,, +\,, \cdot)$), segue que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0,$$

mostrando que o conjunto de vetores

$$\mathcal{C} = \{T(u_1)\,, T(u_2)\,, \cdots, T(u_n)\}$$

é L.I. em $(V\,, +\,, \cdot)$.

Portanto o conjunto de vetores $\mathcal{C}$, dado por (6), gera e é L.I. em $(T(U)\,, +\,, \cdot)$, logo será uma base (ordenada) para o espaço vetorial real (ou complexo) $(T(U)\,, +\,, \cdot)$.

Em particular, teremos

$$\dim[T(U)] = n\,. \tag{9}$$

Logo podemos concluir que

$$
\begin{aligned}
\dim(U) &\overset{(1)}{=} n \\
&= \underbrace{0}_{\overset{(4)}{=}\dim[\mathcal{N}(T)]} + \underbrace{n}_{\overset{(9)}{=}\dim[T(U)]} \\
&= \dim[\mathcal{N}(T)] + \dim[T(U)]\,,
\end{aligned}
$$

ou seja, vale a identidade (2), quando

$$\dim[\mathcal{N}(T)] = 0\,.$$

Tratemos agora do caso

$$p = \dim[\mathcal{N}(T)] \geq 1\,. \tag{10}$$

Seja

$$\mathcal{B}_1 \doteq \{u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_p\} \tag{11}$$

uma base (ordenada) de $(\mathcal{N}(T)\,,+\,,\cdot)$.

Pelo Teorema do completamento (isto é, Teorema 9.4.1, da página 233 das notas de aula), segue que podemos encontrar $q \in \mathbb{N}$, vetores

$$w_1\,,w_2\,,\cdots\,,w_q \in U$$

tais que o conjunto de vetores

$$\mathcal{C} \doteq \{u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_p\,,w_1\,,w_2\,,\cdots\,,w_q\} \tag{12}$$

é uma base (ordenada) de $(U\,,+\,,\cdot)$.

Desta forma teremos que

$$\dim(U) = p + q\,. \tag{13}$$

Como

$$\dim[\mathcal{N}(T)] = p\,,$$

para obtermos a identidade (2), resta mostrar que

$$\dim[T(U)] = q\,. \tag{14}$$

Para isto, mostraremos que o conjunto de vetores

$$\mathcal{D} \doteq \{T(w_1)\,,T(w_2)\,,\cdots\,,T(w_q)\}\,, \tag{15}$$

é uma base (ordenada) de $(T(U)\,,+\,,\cdot)$.

Afirmamos, primeiramente, que o conjunto de vetores $\mathcal{D}$ é L.I. em $(V\,,+\,,\cdot)$.

De fato,

$$\begin{aligned}
\text{se} \qquad & \alpha_1\,,\alpha_2\,,\cdots\,,\alpha_q \in \mathbb{R}\ (\text{ou } \mathbb{C})\,,\\
\text{são tais que} \qquad & \\
& O = \alpha_1 \cdot T(w_1) + \alpha_2 \cdot T(w_2) + \cdots + \alpha_q \cdot T(w_q)\\
& \overset{T \text{ é transformação linear e temos (??)}}{=} T(\alpha_1 \cdot w_1 + \cdots + \alpha_q \cdot w_q)\\
\text{isto é, teremos:} \qquad & (\alpha_1 \cdot w_1 + \cdots + \alpha_q \cdot w_q) \in \mathcal{N}(T)\,.
\end{aligned}$$

Como o conjunto o conjunto de vetores $\mathcal{B}$, dado por (11), é uma base (ordenada) de $(\mathcal{N}(T)\,,+\,,\cdot)$, segue que podemos encontrar escalares

$$\begin{aligned}
& \beta_1\,,\beta_2\,,\cdots\,,\beta_p \in \mathbb{R}\ (\text{ou } \mathbb{C})\,,\\
\text{de modo que} \qquad & \alpha_1 \cdot w_1 + \alpha_2 \cdot w_2 + \cdots + \alpha_q \cdot w_q = \beta_1 \cdot u_1 + \beta_2 \cdot u_2 + \cdots + \beta_p \cdot u_p\,,\\
\text{isto é,} \qquad & \alpha_1 \cdot w_1 + \alpha_2 \cdot w_2 + \cdots + \alpha_q \cdot w_q - \beta_1 \cdot u_1 - \beta_2 \cdot u_2 - \cdots - \beta_p \cdot u_p = O\,.
\end{aligned}$$

Como o conjunto de vetores $\mathcal{C}$ formam uma base (ordenada) de $(U\,,+\,,\cdot)$ (veja (12)), segue que o conjunto $\mathcal{C}$ será L.I. em $(U\,,+\,,\cdot)$.

Portanto, deveremos ter

$$\begin{aligned}
& \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_q = \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_p = 0\,,\\
\text{em particular,} \qquad & \alpha_1 = \cdots = \alpha_q = 0\,,
\end{aligned}$$

o que mostra que o conjunto de vetores

$$\mathcal{D} = \{T(w_1)\,, T(w_2)\,, \cdots, T(w_q)\}$$

é L.I. em $(V\,,+\,,\cdot)$.

Mostremos que o conjunto de vetores $\mathcal{D}$, gera o espaço vetorial real (ou complexo) $(T(U),+,\cdot)$.

Notemos que,

$$\begin{aligned} \text{se} \quad & v \in T(U)\,, \\ \text{podemos encontrar,} \quad & u \in U\,, \\ \text{tal que} \quad & T(u) = v\,. \end{aligned} \tag{16}$$

Como o conjunto de vetores

$$\mathcal{C} = \{u_1\,, u_2\,, \cdots, u_p\,, w_1\,, w_2\,, \cdots, w_q\}$$

é uma base (ordenada) de $(U\,,+\,,\cdot)$ (veja (12)), podemos encontrar escalares

$$\begin{aligned} & \alpha_1\,, \alpha_2\,, \cdots, \alpha_p\,, \beta_1\,, \beta_2\,, \cdots, \beta_p \in \mathbb{R} \text{ ou } (\mathbb{C})\,, \\ \text{de modo que} \quad & u = \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_p \cdot u_p + \beta_1 \cdot w_1 + \cdots + \beta_q \cdot w_q\,, \end{aligned} \tag{17}$$

com isto teremos:

$$\begin{aligned} v & \overset{(16)}{=} T(u) \\ & \overset{(17)}{=} T(\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_p \cdot u_p + \beta_1 \cdot w_1 + \cdots + \beta_q \cdot w_q) \\ & \overset{T \text{ é transformação linear e}}{=} \alpha_1 \cdot \underbrace{T(u_1)}_{u_1 \overset{(11)}{\in} \mathcal{N}(T) \atop = O} + \cdots + \alpha_p \cdot \underbrace{T(u_p)}_{u_p \overset{(11)}{\in} \mathcal{N}(T) \atop = O} + \beta_1 \cdot T(w_1) + \cdots + \beta_q \cdot T(w_q) \\ & = \beta_1 \cdot T(w_1) + \cdots + \beta_q \cdot T(w_q)\,. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} & v \in [T(w_1), \cdots, T(w_q)]\,, \\ \text{ou seja,} \quad & T(U) = [T(w_1), \cdots, T(w_q)]\,, \end{aligned}$$

ou ainda, o conjunto de vetores

$$\mathcal{D} = \{T(w_1), \cdots, T(w_q)\}$$

gera o espaço vetorial real (ou complexo) $(T(U)\,,+\,,\cdot)$.

Assim, o conjunto de vetores $\mathcal{D}$, dado por (15), é uma base (ordenada) de $(T(U)\,,+\,,\cdot)$.

Em particular, teremos

$$\dim[T(U)] = q\,. \tag{18}$$

Portanto, teremos

$$\begin{aligned} \dim(U) & \overset{(13)}{=} \underbrace{p}_{\overset{(10)}{=} \dim[\mathcal{N}(T)]} + \underbrace{q}_{\overset{(18)}{=} \dim[T(U)]} \\ & = \dim[\mathcal{N}(T)] + \dim[T(U)]\,, \end{aligned}$$

mostrando a validade de (2) e completando a demonstração do resultado.

$\square$

$\boxed{\textbf{2.}^{\text{a}}\ \textbf{Questão: (valor 1.5):}}$ Seja $(U\,,+\,,\cdot)$ um espaço vetorial real (ou complexo). Mostre que:

1. se $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), teremos:
$$\lambda \cdot O = O\,; \tag{19}$$

2. se $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) e $u \in U$, teremos:
$$\lambda \cdot (-u) = -(\lambda \cdot u) = (-\lambda) \cdot u\,; \tag{20}$$

3. se $u_1\,, \cdots, u_n \in U$ são L.I. e $v\,, u_1\,, \cdots, u_n \in U$ são L.D. em $(U\,, +\,, \cdot)$, então, podemos encontrar
$$\begin{aligned} & \alpha_1\,, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}), \\ \text{de modo que} \qquad & v = \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n\,. \end{aligned} \tag{21}$$

Resolução:

Do item 1. (valor 0.5) :

Pela definição de espaço vetorial real (ou complexo), temos que
$$\begin{aligned} \lambda \cdot O & \overset{O \text{ é o elemento neutro da adição de vetores}}{=} \lambda \cdot (O + O) \\ & \overset{\text{distribuitiva da multiplicação por escalar pela adição de vetores}}{=} \lambda \cdot O + \lambda \cdot O\,. \end{aligned} \tag{22}$$

Desta forma teremos:
$$\begin{aligned} O & \overset{\text{definição de oposto de um vetor}}{=} \lambda \cdot O + [-(\lambda \cdot O)] \\ & \overset{(22)}{=} (\lambda \cdot O + \lambda \cdot O) + [-(\lambda \cdot O)] \\ & \overset{\text{associativa da adição de vetores}}{=} \lambda \cdot O + \{\lambda \cdot O + [-(\lambda \cdot O)]\} \\ & \overset{\text{definição de oposto de um vetor}}{=} \lambda \cdot O + O \\ & \overset{O \text{ é o elemento neutro da adição de vetores}}{=} \lambda \cdot O\,, \end{aligned}$$
$$\text{isto é,} \qquad \lambda \cdot O = O\,,$$

completando a demonstração do item 1. .

□

Do item 2. (valor 0.5):

Temos que
$$\begin{aligned} \lambda \cdot u + (-\lambda) \cdot u & \overset{\text{distribuitiva da multiplicação de escalar pela adição de vetores}}{=} [\lambda + (-\lambda)] \cdot u \\ & \overset{\text{propriedade de números reais}}{=} 0 \cdot u \\ & \overset{\text{item 2.}}{=} O\,. \end{aligned} \tag{23}$$

Logo, de (23) e da unicidade da existência do elemento oposto, segue que
$$(-\lambda) \cdot u = -(\lambda \cdot u)\,.$$

Analogamente, notemos que:
$$\begin{aligned} \lambda \cdot u + \lambda \cdot (-u) & \overset{\text{distribuitiva da multiplicação de escalar pela adição de vetores}}{=} \lambda \cdot [u + (-u)] \\ & \overset{\text{definição de vetor oposto}}{=} \lambda \cdot O \\ & \overset{(19)}{=} O\,. \end{aligned} \tag{24}$$

Logo, de (24) e da unicidade da existência do elemento oposto, segue que

$$\lambda \cdot (-u) = -(\lambda \cdot u)\,,$$

completando a demonstração do item 2. .

$\square$

Do item 3. (valor 0.5):

Notemos que, como os vetores

$$v\,, u_1\,, u_2\,, \cdots\,, u_n\,,$$

são L.D. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$, pela definição de L.D., podemos encontrar escalares

$$\beta\,, \beta_1\,, \beta_2\,, \cdots\,, \beta_{n+1}\,, \quad \underline{\textbf{não todos nulos}}\,, \tag{25}$$

$$\text{tais que} \quad \beta \cdot v + \beta_1 \cdot u_1 + \beta_2 \cdot u_2 + \cdots + \beta_n \cdot u_n = O\,. \tag{26}$$

Afirmamos que

$$\beta \neq 0\,.$$

Suponhamos, por absurdo, que

$$\beta = 0\,. \tag{27}$$

A expressão (26) tornar-se-á:

$$\beta_1 \cdot u_1 + \beta_2 \cdot u_2 + \cdots + \beta_n \cdot u_n = 0.$$

Como, por hipótese, os vetores

$$u_1\,, u_2\,, \cdots\,, u_n$$

são L.I. no espaço vetorial real (ou complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$, pela Definição de L.I., deveríamos, necessariamente, ter

$$\beta_1 = \cdots = \beta_n = 0\,, \tag{28}$$

$$\text{que juntamente com (27), implicaria em:} \quad \beta = \beta_1 = \cdots = \beta_n = 0\,,$$

o que contrariaria (25).

Portanto deveremos ter

$$\beta \neq 0\,.$$

Com isto, (26) será equivalente a

$$-\beta \cdot v = \beta_1 \cdot u_1 + \cdots + \beta_n \cdot u_n\,,$$

$$\text{e com } \beta \neq 0\text{, teremos:} \quad v = \frac{\beta_1}{-\beta} \cdot u_1 + \cdots + \frac{\beta_n}{-\beta} \cdot u_n\,,$$

ou seja, o vetor $\underline{v}$ pode ser obtido como combinação linear dos vetores

$$u_1\,, u_2\,, \cdots\,, u_n\,,$$

completando a demonstração do item 3. .

$\square$

$\boxed{\textbf{3.}^a\ \textbf{Questão: (valor 2.0):}}$ Consideremos o espaço vetorial real $(\mathbb{R}^4\,,+\,,\cdot)$, munido das operações usuais e os seguintes subconjunto do mesmo:

$$U \doteq \left\{(x\,,y\,,z\,,t)\in\mathbb{R}^4\,;\, x-y+t+z=0\right\} \tag{29}$$

$$\text{e}\qquad W \doteq \left\{(x\,,y\,,z\,,t)\in\mathbb{R}^4\,;\, x+y-t+z=0\right\}\,. \tag{30}$$

Pede-se:

1. mostre que o subconjunto U é um subespaço vetorial de $(\mathbb{R}^4\,,+\,,\cdot)$;
2. encontre uma base para cada um dos subespaços vetoriais de $(\mathbb{R}^4\,,+\,,\cdot)$ abaixo:
   (a) U ;
   (b) W ;
   (c) $U\cap W$;
   (d) $U+W$
3. encontre as dimensões de cada um dos subespaços vetoriais de $(\mathbb{R}^4\,,+\,,\cdot)$ abaixo:
   (a) U ;
   (b) W ;
   (c) $U\cap W$;
   (d) $U+W$.
   (e) $\mathbb{R}^4=U\oplus W$? justifique sua resposta.

Resolução:

Do item 1. (valor 0.5):

Notemos que,

$$O \doteq (\underbrace{0}_{\doteq x},\underbrace{0}_{\doteq y},\underbrace{0}_{\doteq z},\underbrace{0}_{\doteq t})\in U\,, \tag{31}$$

pois

$$\begin{aligned} x-y+z+t &\overset{(31)}{=} 0-0+0+0 \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Observemos também que, se

$$u_1 \doteq (x_1\,,y_1\,,z_1\,,t_1)\in U\,, \tag{32}$$

$$\text{e}\qquad u_2 \doteq (x_2\,,y_2\,,z_2\,,t_2)\in U\,, \tag{33}$$

$$\text{de (29), segue que}\qquad x_1-y_1+z_1+t_1=0 \tag{34}$$

$$\text{e}\qquad x_2-y_2+z_2+t_2=0\,. \tag{35}$$

Para $\lambda\in\mathbb{R}$, teremos

$$\begin{aligned} \lambda\cdot u_1 &\overset{(32)}{=} \lambda\cdot(x_1\,,y_1\,,z_1\,,t_1) \\ &= (\lambda\,x_1\,,\lambda\,y_1\,,\lambda\,z_1\,,\lambda\,t_1)\,. \end{aligned} \tag{36}$$

assim

$$\lambda\cdot u_1+u_2 \overset{(36)\ \text{e}\ (33)}{=} (\underbrace{(\lambda\,x_1+x_2)}_{\doteq x},\underbrace{(\lambda\,y_1+y_2)}_{\doteq y},\underbrace{(\lambda\,z_1+z_2)}_{\doteq z},\underbrace{(\lambda\,t_1+t_2)}_{\doteq t})\,. \tag{37}$$

Logo

$$
\begin{aligned}
x-y+z+t &\overset{(37)}{=} (\lambda x_1+x_2)-(\lambda y_1+y_2)+(\lambda z_1+z_2)+(\lambda t_1+t_2)\\
&\overset{\text{propriedade de } + \text{ e } \cdot \text{ em } \mathbb{R}}{=} \lambda\,(\underbrace{x_1-y_1+z_1+t_1}_{\overset{(36)}{=}0})+(\underbrace{x_2-y_2+z_2+t_2}_{\overset{(35)}{=}0})\\
&=0\,,
\end{aligned}
$$

que, de (29), nos garante que $\quad (\lambda\cdot u_1+u_2)\in U\,,$

mostrando que o subconjunto U é um subespaço vetorial de $(\mathbb{R}^4\,,+\,,\cdot)$, completando a demonstração do item 1. .

$\square$

Do item 2.:

Como conjuntos U e W são subespaços vetoriais de $(\mathbb{R}^4\,,+\,,\cdot)$. segue que os conjuntos $U\cap W$ e $U+W$ também serão subespaços vetoriais de $(\mathbb{R}^4\,,+\,,\cdot)$.

Encontremos bases (ordenadas) para cada um dos subespaços vetoriais acima:

Do item 2a. (valor 0.25):

Para o subespaço vetorial U:

Notemos que

$$
\begin{aligned}
& && u \doteq (x\,,y\,,z\,,t)\in U\,,\\
&\text{se, e somente, de (29):} && x-y+t+z=0\\
&\text{ou, equivalentemente,} && y=x+z+t\,. \qquad (38)
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$u \doteq (x\,,y\,,z\,,t)\in U\,,$$

é equivalente à:

$$
\begin{aligned}
u &= (x\,,y\,,z\,,t)\\
&= (x\,,\underbrace{\quad y\quad}_{\overset{(42)}{=}x+z+t}\,,z\,,t)\\
&= (x\,,x+z+t\,,z\,,t)\\
&= (x\,,x\,,0\,,0)+(0\,,z\,,z\,,0)+(0\,,t\,,0\,,t)\\
&= x\cdot\underbrace{(1\,,1\,,0\,,0)}_{\doteq u_1}+z\cdot\underbrace{(0\,,1\,,1\,,0)}_{\doteq u_2}+t\cdot\underbrace{(0\,,1\,,0\,,1)}_{\doteq u_3}\,, \qquad (39)
\end{aligned}
$$

ou seja, o vetor $u\in U$, pode ser escrito como combinação linear dos vetores

$$u_1\,,u_2\,,u_3\,,$$

os escalares serão os números reais $x\,,z\,,t\in\mathbb{R}$, respectivamente.

Portanto, de (39), teremos:

$$
\begin{aligned}
U &= [u_1\,,u_2\,,u_3]\\
&= [(1\,,1\,,0\,,0)\,,(0\,,1\,,1\,,0)\,,(0\,,1\,,0\,,1)]\,. \qquad (40)
\end{aligned}
$$

Logo, de (40), o conjunto

$$\begin{aligned} S_U &\doteq \{u_1\,,u_2\,,u_3\} \\ &= \{(1\,,1\,,0\,,0)\,,(0\,,1\,,1\,,0)\,,(0\,,1\,,0\,,1)\}\,, \end{aligned} \tag{41}$$

é formado por geradores do subsepaço vetorial U, mostrando que o subsepaço vetorial U é finitamente gerado.

Notemos que o conjunto S_U, dado por (41), é L.I. em $(\mathbb{R}^4\,,+\,,\cdot)$.

De fato, pois

$$O = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \alpha_3 \cdot u_3\,,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} (0\,,0\,,0\,,0) &= \alpha_1 \cdot (1\,,1\,,0\,,0) + \alpha_2 \cdot (0\,,1\,,1\,,0) + \alpha_3 \cdot (0\,,1\,,0\,,1) \\ &= (\alpha_1\,,\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\,,\alpha_2\,,\alpha_3)\,, \end{aligned}$$

$$\text{isto é,} \quad \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}\,,$$

$$\text{cuja única solução será:} \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = 3 = 0\,,$$

mostrando que o conjunto S_U é L.I. em $(\mathbb{R}^4\,,+\,,\cdot)$.

Portanto o conjunto S_U, dado por (41), gera o subespaço vetorial U e é L.I., ou seja, será uma base do mesmo, completando a resolução do item 2a. .

□

Do item 2b. (valor 0.25):

Notemos que se

$$\begin{aligned} & w \doteq (x\,,y\,,z\,,t) \in W\,, \\ \text{se, e somente se, de (30):} \quad & x + y - t + z = 0 \\ \text{ou, equivalentemente,} \quad & t = x + y + z\,. \end{aligned} \tag{42}$$

Portanto,

$$w = (x\,,y\,,z\,,t) \in W\,,$$

é equivalente à:

$$\begin{aligned} w &= (x\,,y\,,z\,,t) \\ &= (x\,,y\,,z\,,\underbrace{t}_{\overset{(42)}{=}x+y+z}) \\ &= (x\,,y\,,z\,,x+y+z) \\ &= (x\,,0\,,0\,,x) + (0\,,y\,,0\,,y) + (0\,,0\,,z\,,z) \\ &= x \cdot \underbrace{(1\,,0\,,0\,,1)}_{\doteq w_1} + y \cdot \underbrace{(0\,,1\,,0\,,1)}_{\doteq w_2} + z \cdot \underbrace{(0\,,0\,,1\,,1)}_{\doteq w_3}, \end{aligned} \tag{43}$$

ou seja, o vetor $u \in U$, pode ser escrito como combinação linear dos vetores

$$w_1\,,w_2\,,w_3\,,$$

onde os escalares serão $x\,,y\,,z \in \mathbb{R}$, respectivamente.

Portanto, de (43), teremos:

$$\begin{aligned} W &= [w_1\,,w_2\,,w_3] \\ &= [(1\,,0\,,0\,,1)\,,(0\,,1\,,0\,,1)\,,(0\,,0\,,1\,,1)]\,. \end{aligned} \tag{44}$$

Logo, de (44), o conjunto

$$\begin{aligned} S_W &\doteq \{w_1\,,w_2\,,w_3\} \\ &= \{(1\,,0\,,0\,,1)\,,(0\,,1\,,0\,,1)\,,(0\,,0\,,1\,,1)\}\,, \end{aligned} \tag{45}$$

é formado por geradores do o subsepaço vetorial W, mostrando que o subsepaço vetorial W é finitamente gerado.

Mostremos que o o conjunto S_U, dado por (45), é L.I. em $(\mathbb{R}^4\,,+\,,\cdot)$.

Para tanto, notemos que

$$O = \alpha_1 \cdot w_1 + \alpha_2 \cdot w_2 + \alpha_3 \cdot w_3\,,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} (0\,,0\,,0\,,0) &= \alpha_1 \cdot (1\,,0\,,0\,,1) + \alpha_2 \cdot (0\,,1\,,0\,,1) + \alpha_3 \cdot (0\,,0\,,1\,,1) \\ &= (\alpha_1\,,\alpha_2\,,\alpha_3\,,\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\,, \end{aligned}$$

isto é, $$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases},$$

cuja única solução será: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = 3 = 0\,,$

mostrando que o conjunto S_W é L.I. em $(\mathbb{R}^4\,,+\,,\cdot)$.

Portanto o conjunto S_W, dado por (45), gera o subespaço vetorial W e é L.I., ou seja, será uma base do mesmo, completando a resolução do item 2b. .

$\square$

Do item 2c. (valor 0.25):

Notemos que

$$\begin{aligned} & v \doteq (x\,,y\,,z\,,t) \in U \cap W\,, \\ \text{se, e somente se,}\quad & v = (x\,,y\,,z\,,t) \in U \\ \text{e}\quad & v = (x\,,y\,,z\,,t) \in W\,, \end{aligned} \tag{46}$$

ou seja, de (29)e (30), deveremos ter que resolver o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x - y + t + z = 0 \\ x + y - t + z = 0, \end{cases},$$

cuja solução é (será deixado como exercício para o leitor): $$\begin{cases} z = -x \\ t = y \end{cases}, \tag{47}$$

para cada $x\,,y \in \mathbb{R}$.

Deste modo, teremos:

$$\begin{aligned} v &= (x\,,y\,,z\,,t) \\ (x\,,y\,,&\underbrace{z}_{\overset{(47)}{=}-x}\,,\underbrace{t}_{\overset{(47)}{=}y}) \\ &= (x\,,y\,,-x\,,y) \\ &= (x\,,0\,,-x\,,0)+(0\,,y\,,0\,,y) \\ &= x\cdot\underbrace{(1\,,0\,,-1\,,0)}_{\doteq v_1}+y\cdot\underbrace{(0\,,1\,,0\,,1)}_{\doteq v_2} \end{aligned} \tag{48}$$

ou seja, o vetor $u \in U$, pode ser escrito como combinação linear dos vetores

$$v_1\,,v_2\,,$$

onde os escalares serão $x\,,y \in \mathbb{R}$, respectivamente.

Portanto, de (48), teremos:

$$\begin{aligned} U \cap W &= [v_1\,,v_2] \\ &= [(1\,,0\,,-1\,,0)\,,(0\,,1\,,0\,,1)]\,. \end{aligned} \tag{49}$$

Logo, de (49), o conjunto

$$\begin{aligned} S_{U\cap W} &\doteq \{v_1\,,v_2\} \\ &= \{(1\,,0\,,-1\,,0)\,,(0\,,1\,,0\,,1)\}\,, \end{aligned} \tag{50}$$

é formado por geradores do o subsepaço vetorial $U \cap W$, mostrando que o subsepaço vetorial $U \cap W$ é finitamente gerado.

Mostremos que o o conjunto $S_{U\cap W}$, dado por (50), é L.I. em $(\mathbb{R}^4\,,+\,,\cdot)$.

Para tanto, notemos que

$$O = \alpha_1\cdot v_1+\alpha_2\cdot wv_2\,,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} (0\,,0\,,0\,,0) &= \alpha_1\cdot(1\,,0\,,-1\,,0 \\ &= (\alpha_1\,,\alpha_2\,,-\alpha_1\,,\ \alpha_2)\,, \end{aligned}$$

isto é, $\left\{\alpha_1 = 0\right.\quad,$

cuja única solução será: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0\,,$

mostrando que o conjunto $S_{U\cap W}$ é L.I. em $(\mathbb{R}^4\,,+\,,\cdot)$.

Portanto o conjunto $S_{U\cap W}$, dado por (50), gera o subespaço vetorial $U \cap W$ e é L.I., ou seja, será uma base do mesmo, completando a resolução do item 2c. .

□

Do item 2d. (valor 0.25):

Será tratado no item 3d. .

□

Do item 3. :

Baseado nos itens do item 2., teremos:

Do item 3a. (valor 0.1):

Como, vimos no item 2a. o conjunto

$$S_{\mathcal{U}} \doteq \{(1\,,1\,,0\,,0)\,,(0\,,1\,,1\,,0)\,,(0\,,1\,,0\,,1)\}$$

é uma base do subespaço vetorial $\mathcal{U}$. segue que

$$\dim(\mathcal{U}) = 3\,, \tag{51}$$

completando a resolução do item 3a.

□

Do item 3b. (valor 0.1):

Como, vimos no item 2b. o conjunto

$$S_{W} \doteq \{(1\,,0\,,0\,,1)\,,(0\,,1\,,0\,,1)\,,(0\,,0\,,1\,,1)\}$$

é uma base do subespaço vetorial W. segue que

$$\dim(W) = 3\,, \tag{52}$$

completando a resolução do item 3b.

□

Do item 3c. (valor 0.1):

Como, vimos no item 2c. o conjunto

$$S_{\mathcal{U}\cap W} \doteq \{(1\,,0\,,-1\,,0)\,,(0\,,1\,,0\,,1)\}$$

é uma base do subespaço vetorial $\mathcal{U} \cap W$. segue que

$$\dim(\mathcal{U}\cap W) = 2\,, \tag{53}$$

completando a resolução do item 3c.

□

Do item 3d. (valor 0.1):

Pela Proposição 5.9.1 (da página 235, das notas de aula), temos

$$\begin{aligned}\dim(\mathcal{U}+W) &= \dim(\mathcal{U}) + \dim(W) - \dim(\mathcal{U}\cap W)\\ &\overset{(51),(52)\text{ e }(53)}{=} 3+3-2\\ &= 4\\ &= \dim\left(\mathbb{R}^4\right)\,,\end{aligned}$$

completando a resolução do item 3c.

Logo, do fato acima e pela Proposição 9.5.1 (da página 238, das notas de aula), segue que

$$\mathcal{U} + W = \mathbb{R}^4\,. \tag{54}$$

□

Logo podemos considerar a base (ordenada) canônica de $\left(\mathbb{R}^4\,,+\,,\cdot\right)$ com uma base (ordenada) para $(\mathcal{U}+W\,,+\,,\cdot)$, ou seja,

$$\mathcal{D} \doteq \{((1\,,0\,,0\,,0)\,,(0\,,1\,,0\,,0)\,,(0\,,0\,,1\,,0)\,,(0\,,0\,,0\,,1)\}$$

será uma base (ordenada) para o subespaço $U + W$, completando a resolução do 3d. .

□

Do item 3e. (valor 0.2):

A soma não será direta pois, pelo item 3c., temos que

$$\dim(U \cap W) = 2\,,$$
$$\text{logo} \qquad U \cap W \neq \{O\}\,, \tag{55}$$

completando a resolução do item 3e.

□

4.ª Questão: (valor 2.5): Considere o espaço vetorial real $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$, munido das operações usuais de soma de funções e multiplicação de número real por função. Pede-se:

1. determinar a matriz das coordenadas do vetor $p \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, dado por
$$p(x) \doteq 10 + x^2 + 2\,x^3\,, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{56}$$
em relação à base canônica $\mathcal{B}$ de $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$, ou seja, $[p]_{\mathcal{B}}$, onde $\mathcal{B} \doteq \{p_o\,, p_1\,, p_2\,, p_3\}$, com
$$p_o(x) \doteq 1\,, \quad p_1(x) \doteq x\,, \quad p_2(x) \doteq x^2\,, \quad p_3(x) \doteq x^3\,, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{57}$$

2. encontre a matriz mudança de base, da base canônica para a base $\mathcal{C}$, ou seja, $M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$, onde $\mathcal{C} \doteq \{q_o\,, q_1\,, q_2\,, q_3\}$, com
$$q_o(x) \doteq 1\,, \quad q_1(x) \doteq 1 + x\,, \quad q_2(x) \doteq 1 + x + x^2\,, \quad q_3(x) \doteq 1 + x + x^2 + x^3\,, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}.. \tag{58}$$

3. encontre a matriz das coordenadas do vetor p acima, em relação à base $\mathcal{C}$, ou seja, $[p]_{\mathcal{C}}$,

Resolução:

Do item 1. (valor 1.0):

Notemos que, para $x \in \mathbb{R}$, teremos:

$$\begin{aligned}
p(x) &\overset{(56)}{=} 10 + x^2 + 2\,x^3 \\
&10 + 0 \cdot x + x^2 + 2\,x^3 \\
&\overset{(57)}{=} 10 \cdot p_o(x) + 0 \cdot p_1(x) + 1 \cdot p_2(x) + 2 \cdot p_3(x) \\
&= [10 \cdot p_o + 0 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 + 2 \cdot p_3](x)\,,
\end{aligned}$$
$$\text{portanto} \qquad [p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\,, \tag{59}$$

completando a resolução do item 1. .

□

Do item 2. (valor 1.0):

Notemos que, para $x \in \mathbb{R}$, teremos:

$$
\begin{aligned}
q_o(x) &\overset{(57)}{=} 1 \\
&= 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \\
&\overset{(56)}{=} 1 \cdot p_o(x) + 0 \cdot p_1(x) + 0 \cdot p_2(x) + 0 \cdot p_3(x) \\
&= [1 \cdot p_o + 0 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 + 0 \cdot p_3](x)\,, \qquad (60) \\
q_1(x) &\overset{(57)}{=} 1 + x \\
&= 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \\
&\overset{(56)}{=} 1 \cdot p_o(x) + 1 \cdot p_1(x) + 0 \cdot p_2(x) + 0 \cdot p_3(x) \\
&= [1 \cdot p_o + 1 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 + 0 \cdot p_3](x)\,, \qquad (61) \\
q_2(x) &\overset{(57)}{=} 1 + x + x^2 \\
&= 1 + 1 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \\
&\overset{(56)}{=} 1 \cdot p_o(x) + 1 \cdot p_1(x) + 1 \cdot p_2(x) + 0 \cdot p_3(x) \\
&= [1 \cdot p_o + 1 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 + 0 \cdot p_3](x)\,, \qquad (62)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_3(x) &\overset{(57)}{=} 1 + x + x^2 + x^3 \\
&= 1 + 1 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3 \\
&\overset{(56)}{=} 1 \cdot p_o(x) + 1 \cdot p_1(x) + 1 \cdot p_2(x) + 1 \cdot p_3(x) \\
&= [1 \cdot p_o + 1 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 + 1 \cdot p_3](x)\,. \qquad (63)
\end{aligned}
$$

Portanto, de (60), (61), (62) e (63), segue que

$$
M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (64)
$$

completando a resolução do item 2. .

$\square$

Do item 3. (valor 0.5):

Da Proposição 11.3.1 (da página 274, das notas de aula) e da Proposição 11.3.3 (da página 280, das notas de aula), teremos:

$$
\begin{aligned}
[p]_{\mathcal{C}} &= M_{\mathcal{C}\mathcal{B}} \cdot [p]_{\mathcal{B}} \\
&= {M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}}^{-1} \cdot [p]_{\mathcal{B}}\,,\,. \qquad (65)
\end{aligned}
$$

Observemos que

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}{}^{-1} \overset{(64)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\overset{\text{exercício}}{=} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{66}$$

Portanto

$$\begin{aligned} [p]_{\mathcal{C}} &\overset{(65)}{=} M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}{}^{-1} \cdot [p]_{\mathcal{B}} \\ &\overset{(66) \text{ e } (59)}{=} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

completando a resolução do item 3. .

□

5.ª Questão: (valor 2.5): Consideremos $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ espaço vetorial real, munido das operações usuais de soma de matrizes e multiplicação de número real por matriz,

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{67}$$

e $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, dada por:

$$T(X) \doteq A \cdot X - X \cdot A , \quad \text{para} \quad X \in M_2(\mathbb{R}) . \tag{68}$$

Pede-se:

1. mostre que $\underline{T}$ é um operador linear em $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$;
2. encontre o núcleo e a imagem do operador linear $\underline{T}$;
3. uma base para o núcleo e uma base para a imagem do operador linear $\underline{T}$;
4. encontre as dimensões do núcleo e da imagem do operador linear $\underline{T}$.

Resolução:

Do item 1. (valor 1.0):

Notemos que se $X_1 \,, X_2 \in M_2(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, teremos:

$$\begin{aligned} T(X_1 + \lambda \cdot X_2) &\overset{(68)}{=} A \cdot (X_1 + \lambda \cdot X_2) - (X_1 + \lambda \cdot X_2) \cdot A \\ &\overset{\text{propriedades das operações com matrizes}}{=} (A \cdot X_1 - X_1 \cdot A) + \lambda \cdot (A \cdot X_2 - X_2 \cdot A) \\ &\overset{(68)}{=} T(X_1) + \lambda \cdot T(X_2)\,, \end{aligned}$$

mostrando que a aplicação T é um operador linear em $(M_2(\mathbb{R}) \,, + \,, \cdot)$, completando a resolução do item 1. .

$\square$

Do item 2. (valor 0.5):

Notemos que,

$$X \doteq \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})\,, \tag{69}$$

satisfaz $X \in \mathcal{N}(T)$

se, e somente se $T(X) = O_2$

ou seja: $A \cdot X - X \cdot A = O_2\,,$

ou, de (67) e (69), equivalentemente: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,,$

ou seja, $\begin{pmatrix} (a + 2\,c) - a & (b + 2\,d) - (2\,a + b) \\ c - c & d - d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,,$

isto é $\begin{pmatrix} 2\,c & 2\,d - 2\,a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,,$

que nos fornece:
$$\begin{cases} c = 0 \\ d = a \end{cases} \tag{70}$$

Portanto, (69) e (70), teremos

$$\mathcal{N}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \,;\, a\,, b \in \mathbb{R} \right\}\,. \tag{71}$$

Observemos agora que

$$Y \doteq \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})\,, \tag{72}$$

$$\begin{aligned}
\text{satisfaz}\quad & Y \in T(M_2(\mathbb{R})) \\
\text{se, e somente se,}\quad & T(X) = Y \\
\text{para algum}\quad & X \doteq \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \\
\text{tal que}\quad & T(X) = Y\,, \\
\text{ou seja:}\quad & A \cdot X - X \cdot A = Y\,, \\
\text{ou, de (67) e (69), equivalentemente:}\quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}\,, \\
\text{ou seja,}\quad & \begin{pmatrix} (x_1 + 2\,x_3) - x_1 & (x_2 + 2\,x_4) - (2\,x_1 + x_2) \\ x_3 - x_3 & x_4 - x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}\,, \\
\text{isto é}\quad & \begin{pmatrix} 2\,x_3 & 2\,x_4 - 2\,x_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}\,, \\
\text{que nos fornece:}\quad & \begin{cases} 2\,x_3 = y_1 \\ 2\,x_4 - 2\,x_1 = y_2 \\ 0 = y_3 \\ 0 = y_4 \end{cases} \\
\text{isto é}\quad & \begin{cases} x_3 = \dfrac{y_1}{2} \\ x_4 - x_1 = \dfrac{y_2}{2} \\ 0 = y_3 \\ 0 = y_4 \end{cases}\,.
\end{aligned} \tag{73}$$

Portanto, (72) e (73), teremos

$$T\,(M_2(\mathbb{R})) = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,;\, y_1\,, y_2 \in \mathbb{R} \right\}\,. \tag{74}$$

completando a resolução do item 2.

$\square$

Do item 3. (valor 0.5):

De (71), segue que

$$X \doteq \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{N}(T)$$

se, e somente se:

$$\begin{aligned}
X &\doteq \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \\
&= a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,.
\end{aligned} \tag{75}$$

Logo, se considerarmos

$$S_{\mathcal{N}(T)} \doteq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \tag{76}$$

$$\text{de, (71), segue que} \qquad \mathcal{N}(T) = [S] . \tag{77}$$

Notemos que o conjunto $S_{\mathcal{N}(T)}$ é L.I. em $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$, pois

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{se, e somente se:} \qquad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ou seja,} \qquad \alpha = \beta = 0 ,$$

mostrando que o conjunto é L.I.

Logo, como o conjunto

$$S_{\mathcal{N}(T)} \doteq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \tag{78}$$

será uma base para subespaço vetorial $\mathcal{N}(T)$.

Para a imagem de T, temos:

$$Y \doteq \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} \in T(M_2(\mathbb{R}))$$

de (74), é equivalente a:

$$\begin{aligned} Y &\doteq \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= y_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{79}$$

Logo, se considerarmos

$$S_{T(M_2(\mathbb{R}))} \doteq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \tag{80}$$

$$\text{de, (74), segue que} \qquad T(M_2(\mathbb{R})) = [S_{T(M_2(\mathbb{R}))}] . \tag{81}$$

Notemos que o conjunto $S_{T(M_2(\mathbb{R}))}$ é L.I. em $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$, pois

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{se, e somente se:} \qquad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ou seja,} \qquad \alpha = \beta = 0 ,$$

mostrando que o conjunto é L.I.

Logo, como o conjunto

$$S_{T(M_2(\mathbb{R}))} \doteq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \tag{82}$$

será uma base para subespaço vetorial $\mathsf{T}(M_2(\mathbb{R}))$, completando a resolução do item 3.

$\square$

$\boxed{\textbf{Do item 4. (valor 0.5):}}$

Logo, de (78), segue que

$$\dim[\mathcal{N}(\mathsf{T})] = 2\,,$$

e de (82), teremos que

$$\dim[\mathsf{T}(M_2(\mathbb{R})] = 2\,,$$

completando a resolução do item 4.

$\square$

$\boxed{\textbf{F I M}}$