TÓPICOS DE HISTÓRIA

DA MATEMÁTICA

- **A espiral de Arquimedes e a Trissecção do Ângulo**
- **Aplicação de Áreas**
- **Apolônio e as Cônicas**

PROFMAT - USP

Leandro Aparecido Nogueira

Prof.: Wagner

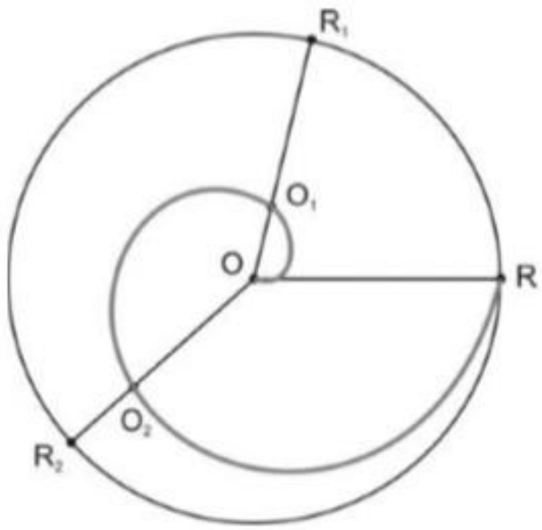
1. A Espiral de Arquimedes e a trissecção do Ângulo

A Espiral de Arquimedes, curva importante, permite resolver dois problemas clássicos da geometria grega, a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo.

“Se uma linha reta traçada em um plano se move uniformemente em torno de uma extremidade fixa e retorna à sua posição de partida, e se ao mesmo tempo em que a reta se move (uniformemente), um ponto partindo da origem se move (uniformemente) sobre a reta, este ponto irá descrever uma espiral no plano. ”

Baseado na noção de proporcionalidade, temos que a espiral é uma curva gerada por um ponto que se move sobre um segmento de reta com velocidade constante ao mesmo tempo em que este segmento de reta se move, também com velocidade constante, circularmente com a extremidade fixa e a outra sobre uma circunferência. A partir dessa definição mecânica, Arquimedes define a propriedade fundamental da espiral:

Consideremos a espiral com extremidade O e R e o círculo correspondente de raio OR. Então, Arquimedes mostra que se dois segmentos de reta, OO_2 e OO_1 são traçados da origem até os pontos da espiral e se estes segmentos prolongados cortam o círculo respectivamente em R_2 e R_1, temos que estes segmentos estarão entre si na mesma razão que os arcos de circunferência correspondentes.



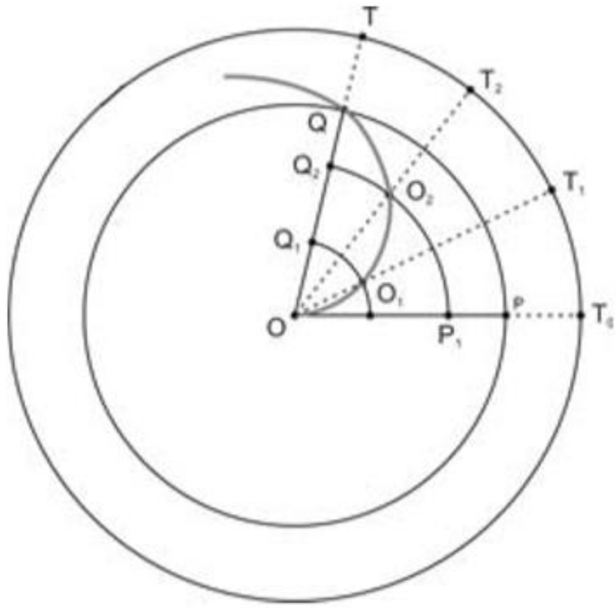
Ou seja,

$$OO_2 : OO_1 :: \text{arco}RR_2 : \text{arco}RR_1$$

Com efeito, quando a reta OR gira, os pontos R_1 se movem com velocidade uniforme sobre a circunferência enquanto os pontos O_1 se movem com velocidade uniforme sobre o segmento de reta OR. Sendo assim, quando R chega a R_1, o ponto O chega a O_1 e quando R chega a R_2 o ponto O chega a O_2.

O problema de dividir um ângulo em três partes iguais era um dos problemas importantes da geometria grega. Sabemos dividir um ângulo em duas partes iguais com régua e compasso, mas muitas foram as tentativas frustradas de encontrar um procedimento análogo para o caso da trissecção do ângulo. Uma aplicação da Espiral de Arquimedes é justamente permitir achar uma solução para este problema. Isso é feito como segue.

Seja o ângulo POQ que desejamos dividir em três. Marque os pontos Q_1 e Q_2 de modo que dividam OQ em três partes iguais. Traçamos, então, dois arcos de circunferência com centro em O e com raios OQ_1 e OQ_2 que cortarão o trecho de espiral que vai de O a Q em dois pontos O_1 e O_2. Então, as retas OO_1 e OO_2 trissectam o ângulo POQ.



Com efeito. Tracemos uma circunferência de raio OT_0, que define a espiral, e marquemos os pontos T_1 e T_2 sobre a mesma, prolongando OO_1 e OO_2. Sejam os pontos T_0 e T os pontos de encontro dos prolongamentos de OP e OQ com a circunferência de raio OT_0 respectivamente. Pela propriedade da espiral, o arco de circunferência T_0T_1 está para o arco T_0T assim como o segmento OO_1 está para o segmento OQ. Mas, mas por construção, $OO_1=OQ_1=OQ/3$, o que demonstra que o segmento OO_1 trissecta o ângulo POQ. Isto porque o arco T_0T_1 divide T_0T em três. Este procedimento permite dividir um ângulo em um número, n, de partes: é suficiente dividir o segmento OQ em n partes.

A principal propriedade da espiral, que é bastante útil para problemas de construção, está no fato de associar uma razão entre arcos (ou ângulos) a uma razão entre segmentos. A espiral estabelece uma proporcionalidade entre uma distância em linha reta e uma medida angular, o que permite reduzir o problema de dividir um ângulo em partes iguais ao problema simples de dividir um segmento de reta em partes iguais. A distância entre a origem e um ponto sobre a espiral é proporcional ao ângulo formado pela reta inicial e pela reta que compõe este ângulo.

2. Apolônio e as Cônicas

Antes de começar a apresentar a maneira de Apolônio abordar as cônicas, é necessária uma breve introdução às aplicações de área da geometria grega e os tipos de curvas cônicas.

2.1. Aplicação de Áreas

O que é, na terminologia matemática grega, aplicar uma figura (poligonal) a uma reta dada? Esse problema consiste em construir a figura dada de tal maneira que o segmento de reta seja um de seus lados. Em geral, é exigido que a figura construída, preencha algumas exigências. Por exemplo, sejam ABCDE um polígono e KL um segmento de reta (Figura 3.14). Aplicar ao segmento KL, por exemplo, um paralelogramo, com área igual a ABCDE, significa construir um paralelogramo KLRS de que KL é um dos lados, e cuja área seja igual a área de ABCDE. Pode também ser pedido que o paralelogramo atenda a outras exigências, como, por exemplo, ter o ângulo SKL igual a um ângulo dado. Na maioria das aplicações, o paralelogramo aplicado é um retângulo, ou seja, o ângulo SKL é reto. Neste material, nos limitaremos a este caso.

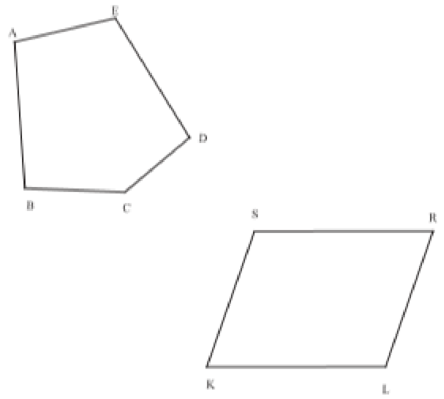


Figura 3.14 Aplicação de áreas

Os gregos usavam três tipos de aplicação de áreas, listados a seguir:

1. Aplicação parabólica;
2. Aplicação elíptica;
3. Aplicação hiperbólica.

2.1.1. Aplicações Parabólicas:

Uma aplicação parabólica (Veja a Figura 3.15) consiste em aplicar a um segmento (de) um paralelogramo (DEFG) igual a uma figura dada (S), com um ângulo especificado (ABC). Ou seja, construir um paralelogramo, de que um dos lados é um segmento dado, e igual a área de uma figura poligonal dada.

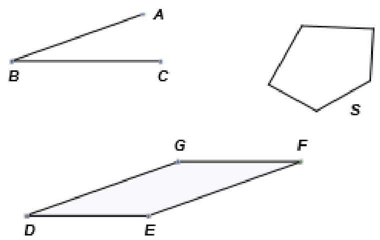


Figura 3.15 Aplicação de áreas parabólica

2.1.2. Aplicações Elípticas:

Em sua formulação geral, uma Aplicação elíptica ou *com falta* consiste em aplicar a um segmento de reta AB, um paralelogramo, com um ângulo dado, igual a um polígono dado, e de tal maneira que o que falta para completar a figura a todo o segmento AB seja um paralelogramo semelhante a um paralelogramo dado (Figura 3.16). No caso que nos interessa, o de retângulos, o problema é reformulado da seguinte forma: Dado o polígono C, pede-se que seja construído o retângulo ASUT, com área igual à de C, e tal que SBRU seja um quadrado dado. O quadrado SBRU é o "que falta" para que ASUT tenha AB como lado, isto é, esteja aplicado a AB.

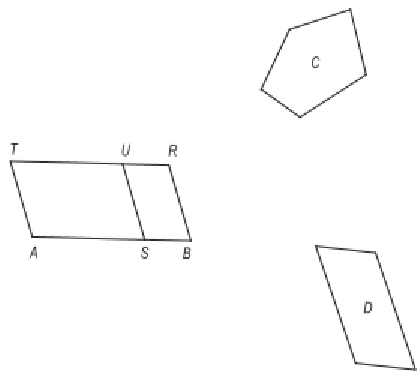


Figura 3.16 Aplicação de áreas elíptica ou com falta

2.1.3. Aplicações Hiperbólicas:

Uma Aplicação hiperbólica ou com excesso consiste em aplicar a um segmento de reta AB, um paralelogramo, com um ângulo dado, igual a um polígono dado, e de tal maneira que ele excede o segmento AB por um paralelogramo semelhante a um paralelogramo dado (Figura 3.17). Dado o polígono C, pede-se que seja construído o paralelogramo APOR com área igual à de C, e tal que BPOQ seja semelhante ao paralelogramo D. O paralelogramo BPOQ é o “excesso” para que ABQR tenha lado AB, isto é, esteja aplicado a AB.

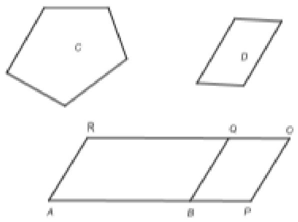


Figura 3.17 Aplicação de áreas hiperbólica ou com excesso

2.2. Cônicas

Apolônio foi o primeiro a conceber as cônicas como interseções de uma mesma superfície cônica circular, não necessariamente reta, cortada por planos de inclinações diferentes. Seu livro mais célebre, escrito no século III a.E.C., chamado Cônicas, traz um apanhado de muitos resultados sobre cônicas, obtidos até aquele momento por seus antecessores, mas contém também inovações importantes. Uma das novas concepções introduzidas por Apolônio, utilizadas até hoje, é a consideração de um cone de duas folhas. A partir deste cone, as seções cônicas passarão a ser caracterizadas do seguinte modo: se o plano corta todas as geratrizes sobre uma mesma folha do cone, obtemos uma elipse; se o plano é paralelo a uma das geratrizes, obtemos uma parábola; e se o plano corta as duas folhas do cone, obtemos uma hipérbole.

Figura 2.2.1: Elipse

Figura 2.2.2: Hipérbole

Figura 2.2.3: Parábola

Veremos agora o modo como Apolônio construiu a parábola e sua relação com o método de aplicação de áreas. Seja o cone da Figura 3.18, de vértice T, cortado pelo plano de seção P1:

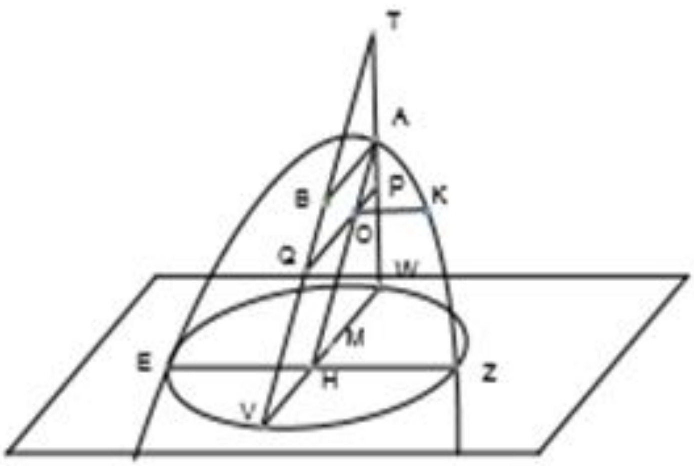
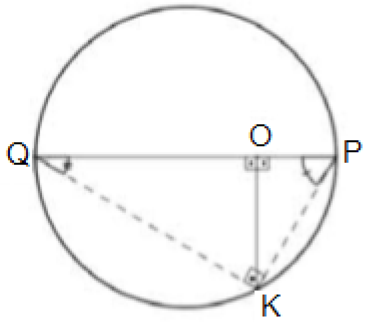


Figura 3.18

O triângulo TVW está em um plano que corta o cone em seu eixo TM (reta pelo vértice até o centro da base). O segmento VW é a interseção deste plano com a base do cone, que faz ângulos retos com o segmento EZ (no qual o plano de seção intercepta a base). O plano de seção P1 corta TVW no segmento AH. Um planoP2 paralelo à base corta o cone em uma circunferência com PQ como diâmetro e intercepta o plano de seção em KO. O ponto K está sobre o cone e sobre plano de seção, sendo assim um ponto da cônica.



O Triângulo ∆QKP é semelhante aos triângulos ∆QOK e ∆OKP. Como os triângulos ∆QOK e ∆OKP são semelhantes, então:

$$\frac{KO}{PO} = \frac{QO}{KO} \Rightarrow KO^2 = QO \times PO$$

Seja KO a meia proporcional de QO e PO. Sabemos, pela propriedade da circunferência, que o quadrado de lado KO tem área igual à de um retângulo de lados QO e PO (Veja a Figura 3.19). Por um abuso de linguagem, ou seja, modernizando a linguagem matemática de Apolônio, que usa somente palavras, diremos que $KO^2 = QO \times PO$. Mas, na figura 3.19, BA foi construído para ser paralelo a VW e igual a QO. Logo,

$$BA : TA :: VW : TW$$

E

$$PO : AO :: WV : TV$$

Como BA = QO, podemos obter destas proporções que:

$$QO \times PO : TA \times AO :: VW^2 : TW \times TV.$$

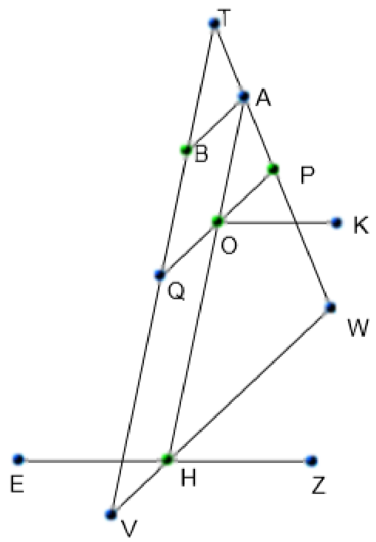


Figura 3.19

Definimos agora um segmento N por

$$N : TA :: VW^2 : TW \times TV.$$

Segue-se desta definição que

$$N : TA :: QO \times PO : TA \times AO.$$

Mas sabemos que

$KO^2 = QO \times PO$, logo podemos dizer que

$$N : TA :: KO^2 : TA \times AO.$$

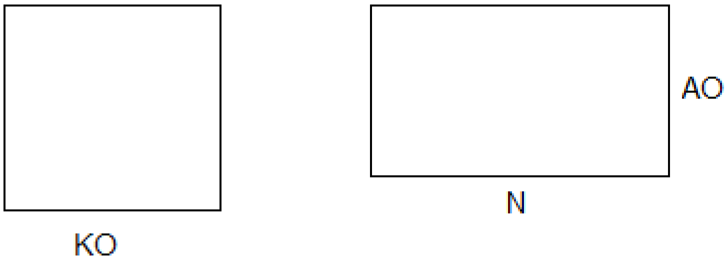
Por outro lado,

$$N : TA :: N \times AO : TA \times AO.$$

Destas duas igualdades podemos tirar a relação

$$KO^2 = N \times AO$$

Para Apolônio, o significado da relação $KO^2 = N \times AO$ era que o quadrado de lado KO aplicado parabolicamente (ou seja, exatamente) sobre N fornece um retângulo de lado AO.



De maneira semelhante, Apolônio estuda a elipse e a hipérbole, relacionadas a aplicações por falta e por excesso, respectivamente.