USP

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Prof. Dr. Wagner Vieira Leite

USP - São Carlos

PROFMAT

TÓPICOS DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Problemas Matemáticos Babilônicos

luno: Antonio Carlos de Campos - 10235067

São Carlos – SP
2020

Cálculos e problemas matemáticos babilônicos

Vejamos, inicialmente, um exemplo de uma "tabuada" de multiplicação por 25. Nos tabletes, os textos entre parênteses ficam subentendidos, só são escritos os multiplicadores (1, 2, 3, . . .) e os resultados da multiplicação, (25, 50, . . .):

1 (vezes 25 ´ e igual a) 25
2 (vezes 25 ´ e igual a) 50
3 (vezes 25 ´ e igual a) 1; 15
4 (vezes 25 ´ e igual a) 1; 40
5 (vezes 25 ´ e igual a) 2; 05
6 (vezes 25 ´ e igual a) 2; 30
7 (vezes 25 ´ e igual a) 2; 55

As tabelas de multiplicação fornecem os múltiplos de um número. Em geral, dado o número p, a tabela dos múltiplos de p não mostra os produtos $1 \times p$, $2 \times p$, . . ., até $59 \times p$. São dados os produtos $1 \times p$, $2 \times p$, . . ., até $20 \times p$ e, deste número em diante, somente os produtos $30 \times p$, $40 \times p$, $50 \times p$. Para calcular, por exemplo, $37 \times p$, e suficiente somar $30 \times p$ com $7 \times p$.

A adição é feita de maneira inteiramente análoga à nossa adição usual em base 10. Isso não é de espantar pois nosso algoritmo se baseia nas propriedades associativa, distributiva e comutativa da adição, e as mesmas podem ser utilizadas em um sistema cuja base seja qualquer número natural, b, maior do que 1.

Exemplo 1. *Vejamos exemplos de operações feitas no sistema sexagesimal babilônio.*

1) 1; 30, 27; 50 + 0; 29, 38; 13 = 2; 0, 6; 3.

Temos, montando o algoritmo de maneira exatamente igual à nossa:

60^1	60^0	60^{-1}	60^{-2}
1	1	1	
1	30	27	50
0	29	38	13
2	00	06	03

2) 2; 30, 4; 38 − 40, 5; 15 = 1; 49, 59; 23.

O algoritmo também é análogo ao que usamos em base 10.

60^1	60^0	60^{-1}	60^{-2}
1	1	1	
2	30	4	38
	40	5	15
2	00	06	03

3. 11; 32 × 25.

(Figura 1.6). Podemos desenhar 4 colunas indicando o multiplicando e a ordem de grandeza do resultado

ORDEM DAS 3600	ORDEM DAS SESSENTENAS	UNIDADES	MULTIPLICANDO 11;32

Figura 1.6

Em seguida, procuro na tábua de multiplicação por 25 o correspondente à multiplicação por 2 (50) e reproduzo o valor encontrado na coluna das unidades (Figura 1.7).

Agora, apago 2 na coluna do multiplicando e escrevo o valor correspondente a 30 na tábua de multiplicação por 25 (12; 30). (Figura 1.8).

Apago o 30 da coluna do multiplicando e procuro na tábua de multiplicação por 25 o valor correspondente a 11 (4; 35).

		50	11;32

Figura 1.7

	12	50 30	11;30

Figura 1.8

Como 11 é de uma ordem superior à utilizada até este ponto, escrevo 4 na coluna das 3.600 e 35 na coluna das sessentenas (Figura 1.9).

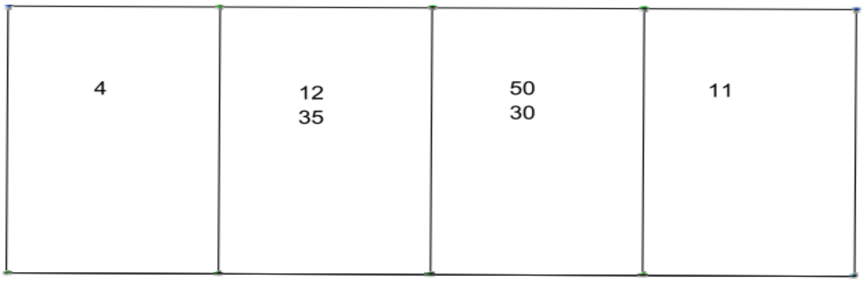


Figura 1.9

Podemos, agora, apagar o 11 e só resta simplificar cada coluna para obter o resultado (Figura 1.10). Assim, o resultado é 4; 48; 20.

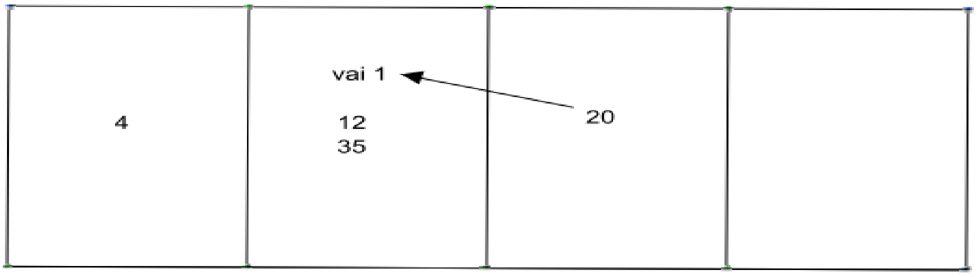


Figura 1.10

As divisões eram feitas com o auxílio de tabletes de inversos multiplicativos, que listavam números e seus inversos multiplicativos. Esses inversos hoje seriam escritos como frações do tipo $\frac{1}{n}$. A divisão de *m* por *n* era efetuada pela multiplicação de *m* pelo inverso multiplicativo de *n*, ou seja, em nossa linguagem moderna, desconhecida para os babilônios, $\frac{m}{n} = m.\frac{1}{n}$. Havia, no entanto, um problema com os números cujo inverso não possuem representação finita em base sessenta, como 7 ou 11. Nós temos o mesmo problema com o número 3, pois o desenvolvimento decimal de $\frac{1}{3}$ e infinito.

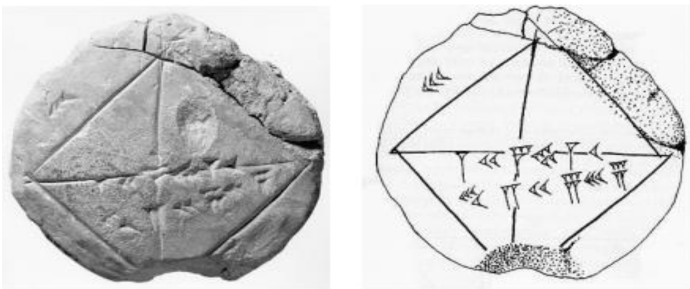
Exemplo 1.2. *Mostraremos que os inversos de* 7 *e de* 11 *não têm representação finita em base sessenta.* Com efeito, o número $\frac{1}{k}$ tem representação finita em base sessenta se pode ser escrito como $\frac{1}{k} = 0, a_1 a_2 ... a_n = \frac{a_1}{60} + \frac{a_2}{60^2} + ... + \frac{a_n}{60^n}$. Multiplicando e dividindo todas as parcelas por 60^n, temos: $\frac{1}{k} = \frac{a_1 60^{n-1} ..... a_n 60^0}{60^n} = \frac{a}{60^n}$, em que, o numerador é um inteiro. Disso, segue-se imediatamente que:

$$ak = 60^n = 2^{2n} \times 3^n \times 5^n.$$

Então, pelo teorema fundamental da aritmética, o produto *ak* só pode conter os fatores primos 2, 3 e 5. Logo, *a* só pode ter estes fatores. Isso não acontece para 7 e 11.

1.3.1- O cálculo da raiz quadrada

Além das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, os babilônios sabiam também calcular potencias e raízes quadradas, que eram registradas em tabletes. O exemplo mais famoso de cálculo de raízes quadradas pelos babilônios encontra-se no tablete YBC 7289, de que mostramos uma imagem é um desenho, o qual permite ler, com mais clareza, os números que constam nos tabletes, de entre os anos 2.000 e 1.600 a.E.C., produzido em um contexto escolar. O tablete, de forma grosseiramente circular, tem um diâmetro de aproximadamente 7 cm. Próximo a um dos lados do quadrado vemos o número, escrito no sistema sexagesimal babilônio, 30. Próximo a uma das diagonais, encontram-se os números 1*,* 24; 51; 104 e 42; 25; 35.



(a) (b)

Figura 1.11 YBC 7289

Ora, 30 × 1*,* 24; 51; 10 = 42; 25; 35. Segundo Fowler e Robson ([64]), a constante 1*,* 24; 51; 10 encontra-se em uma *tabela de coeficientes*, o tablete YBC 7243, e é chamado a *diagonal do quadrado*. Assim, a conclusão inevitável é que a diagonal *d* do quadrado é igual a *l* × 1*,* 24; 51; 10, em que *l é* o lado do quadrado, no nosso caso 30 (1/2 em nosso sistema de numeração decimal). Vemos, portanto, que os escribas babilônios sabiam que l / *d* ≈ 1*,* 24; 51; 10.

De fato, (1*,* 24; 51; 10) = 1*,* 24; 51; 10, o que dá uma boa aproximação de $\sqrt{2}$. Apresentamos a seguir a proposta de Katz ([94], p. 28) para explicar como os babilônios chegaram a esta raiz quadrada. O método era bastante interessante, uma vez que permitia obter valores aproximados para raízes que sabemos hoje serem irracionais. Escrito em linguagem atual, o procedimento para calcular a raiz de um número *k* se baseava, segundo Katz, no resultado geométrico explicado a seguir.

Na figura 1.12, se o segmento *AE é* cortado em um ponto *B*, o quadrado sobre *AE* é igual ao quadrado sobre *AB* mais o quadrado sobre *BE* mais duas vezes o retângulo formado por *AB* e *BE*. Se *AB* medir *a* e *BE* medir *c*, trata-se da versão geométrica da igualdade que escrevemos hoje em dia como: $(a + c)^2 = a^2 + c^2 + 2ac$.

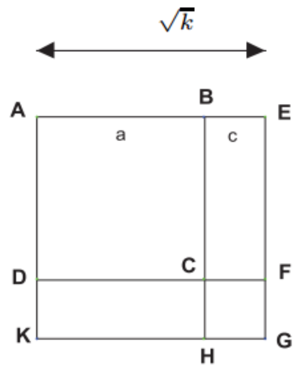


Figura 1.12

Figura 1.12 - Calcular a raiz de *k é* achar o lado de um quadrado de área *k*. Logo, podemos tentar colocar no interior deste quadrado o maior quadrado possível cujo lado conhecemos e usar o resultado geométrico acima para encontrar o resto.

Ou seja, se *a é* o lado do quadrado conhecido, obtemos que a raiz de *k*, $\sqrt{k}$, é igual a $a + c$. Para achar uma raiz melhor do que *a*, vamos procurar uma boa aproximação para *c*, o que pode ser feito observando a área da região poligonal *BEGKDC* (Figura 1.12).

A área da região poligonal é obviamente igual a $k - a^2$. Por outro lado, ele pode ser decomposto em dois retângulos de lados *a* e *c* e em um quadrado de lado *c*. Assim, $2ac + c^2 = k - a^2$*.* Se *c* for bem pequeno, podemos desprezar c^2, e obtemos 18.

$$c \approx \frac{k - a^2}{2a}$$

$$c \approx a + \frac{k - a^2}{2a} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{k}{a}\right)$$

Então, $a' \approx a + c$ é uma aproximação de $\sqrt{k}$ melhor do que *a*, como pode ser visto imediatamente pela interpretação geométrica que apresentamos. Isso decorre também do fato que se $a < \sqrt{k}$, então $k/a > \sqrt{k}$, e se $a > \sqrt{k}$, então $k/a < \sqrt{k}$. Com efeito, como estamos lidando com números positivos não-nulos,

$$a < \sqrt{k} \Longleftrightarrow a\sqrt{k} < \sqrt{k}\sqrt{k} = k \Longleftrightarrow \sqrt{k} < \frac{k}{a}$$

A segunda parte da afirmação é demonstrada de maneira análoga.

Problemas do segundo grau na Babilônia

Além de tabletes de resultados de operações, existem também outras que contém procedimentos, como se fossem exercícios resolvidos. Estes exercícios correspondem a problemas que resolveríamos hoje por meio de equações. Analisaremos alguns destes procedimentos com detalhes, a fim de mostrar, contudo, o quanto seria anacrônico considerar que os babilônios soubessem resolver equações. Durante bastante tempo, até recentemente, os historiadores realmente acreditavam, erroneamente, que os babilônios sabiam resolver equações, “tinham uma álgebra”, que mais tarde seria expressa geometricamente pelos gregos. Os dois exemplos a seguir encontram-se na coleção do

British Museum, no tablete BM 13901. O primeiro é o problema #1, traduzido usualmente da seguinte maneira:

Exemplo 1.3. *Procedimento*: *"Adicionei a área e o lado de um quadrado: obtive 0,45. Qual o lado*?"

Apresentação dos cálculos para facilitar a compreensão (Análogo à base 10)

Exemplo - I: 0,5 = $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ *(Base 10)*

Exemplo - II: 0,30 = $\frac{30}{60} = \frac{1}{2}$ *(Base 60 - Babilônios)*

Solução: 1. Tome 1.

2. fracione 1 tomando a metade (:0,30) → *Metade de 1 é* $\frac{1}{2}$*, na base 60, igual a 0,30.*

3. multiplique 0,30 por 0,30 (:0,15) → 0,30 x 0,30 = $\frac{1}{2} x \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ = 0,15 ($\frac{1}{4}$ *da parte inteira)*

4. some 0,15 a 0,45 (:1) → *0,15 + 0,45 = 1 (*$\frac{45}{100}$*), (*$\frac{60}{100}$ *= 1 unidade)*

5. 1 é a raiz quadrada de 1 → $\sqrt{1} = 1$

6. subtraia os 0,30 de 1 → *1 – 0,3 = 0,3, (1 -* $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ *que representa* $\frac{30}{60}$*)*

7. 0,30 é o lado do quadrado. Logo a lado do quadrado é 0,30.

Cada passo do procedimento acima era executado com a ajuda de um tablete, por exemplo, a etapa (3) exigia a consulta a um tablete de multiplicação ou de quadrados e a etapa (5), evidente neste caso particular, era resolvida em geral pela consulta a um tablete de raízes quadradas.

Neste mesmo tablete, BM 13901, há um problema parecido, o #3, traduzido como segue:

Exemplo 1.4.

Procedimento: *"Subtraí o terço da área e depois somei o terço do lado do quadrado à área restante:* 0, 20*"*

Solução:

Lembrando q : → 0,30 = $\frac{30}{60} = \frac{1}{2}$ *(Base 60 - Babilônios)*

1. tome 1; 0

2. subtraia o terço de 1; 0, ou seja 0, 20, obtendo 0, 40 → *1-* $\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$*, na base 60, igual a 0,40. (A)*

3. multiplique 0, 40 por 0, 20 obtendo 0, 13; 20 → 0,40 x 0,20 = $\frac{40}{60} x \frac{20}{60} = \frac{2}{3} x \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$ *x 60 =*

$0,\overline{2}$ x 60 = $13,\overline{3}$ = 00, 13; 20 ($\frac{2}{9}$ *da parte inteira)*

4. encontre a metade de 0, 20 (0, 10) → 0,20 / 2 = $\frac{20}{60} x \frac{1}{2} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ = 0,10 ($\frac{1}{6}$ *da parte inteira)*

5. multiplique 0, 10 por 0, 10 (0, 1; 40) → 0,10 x 0,10 = $\frac{10}{60} x \frac{10}{60} = \frac{1}{6} x \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ *x60* = $1,\overline{6}$ = 00, 1; 40 ($\frac{1}{36}$ *da parte inteira)*

6. adicione 0, 1; 40 a 0, 13; 20 (: 0; 15) → *na tabela abaixo temos: 00;01;40 + 00;01;20 = 00;15*

60^0	60^{-1}	60^{-2}
00	1^{+1}	40
00	13	20
00	15	

7. 0, 30 é a raiz quadrada

8. subtraia 0, 10 de 0, 30 (: 0, 20) → *1 – 0,3 = 0,30 (1 -* $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ *que representa* $\frac{30}{60}$ *)*

9. tome o recíproco de 0, 40 (1, 30) 1/ 0,40 = $\frac{60}{60} / \frac{40}{60} = \frac{60}{60} x \frac{60}{40}$ = *1 x* $\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ = 1,5 = 1,30

10. multiplique 1, 30 por 0, 20 (: 0, 30) → 1,30 x 0,20 = $\frac{60}{60} + \frac{30}{60} x \frac{20}{60}$ = *(1 +* $\frac{1}{2}$*)x* $\frac{1}{3} = \frac{3}{2} x \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ *= 0,30 (*$\frac{1}{2}$ *da parte inteira)*

11. 0, 30 é o lado do quadrado

Atualmente, os problemas dos exemplos 1.3, 1.4 e 1.5, o qual ainda será visto, poderiam ser resolvidos por uma equação do segundo grau. Obviamente, na época de que tratamos não se escrevia uma equação geral do tipo $Ax^2 + Bx + C = 0$, pois não havia símbolos para designar os coeficientes e as incógnitas. Logo, não havia sequer um sentido para aquilo que concebemos como “equação”. Resolvemos problemas como os acima, hoje, criando regras gerais que podem ser aplicadas a exemplos particulares. Os exemplos particulares são vistos como “casos” de um tipo de problema genérico. Os babilônios obtêm os mesmos resultados construindo uma lista de exemplos típicos, empregando-os em seguida para resolver novos problemas e não possuíam uma linguagem para expressar estes casos de modo genérico. No entanto, isto não significa que esta Matemática não fosse dotada de um certo tipo de generalidade. Na verdade, os primeiros passos do problema 3 servem para reduzir seu enunciado ao do problema 1, sendo possível interpolar o procedimento já enunciado para este problema, considerado um exemplo típico. O modo de enunciar o procedimento babilônio para o caso geral de uma equação de tipo $Ax^2 + Bx = C$ levou alguns historiadores a conjecturarem que a Matemática babilônia seria de natureza primordialmente algébrica. Entre eles destaca-se O. Neugebauer, um dos principais responsáveis pelas primeiras traduções de textos matemáticos babilônios.

Com efeito, dada uma equação do tipo $Ax^2 + Bx = C$, o procedimento acima pode ser traduzido algebricamente no roteiro descrito abaixo para encontrar a raiz de

$$L = \left(\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + AC} - \frac{B}{2}\right) x \frac{1}{A}$$

1) Multiplique A por C (obtendo AC)

2) Encontre metade de B (obtendo $\frac{B}{2}$)

3) Multiplique $\frac{B}{2}$ por $\frac{B}{2}$ (obtendo $\left(\frac{B}{2}\right)^2$

4) Adicione AC a $\left(\frac{B}{2}\right)^2$ (obtendo $\left(\frac{B}{2}\right)^2 + AC$)

5) A raiz quadrada é $\left(\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + AC}\right)$

6) Subtraia $\left(\frac{B}{2}\right)$ da raiz acima

7) Tome o recíproco de A (obtendo $\frac{1}{A}$)

8) Multiplique $\frac{1}{A}$ pela raiz para obter o lado do quadrado

9) O lado do quadrado é $\left(\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + AC} - \frac{B}{2}\right) x \frac{1}{A}$

Obs.: Essa interpretação é a mesma que usamos hoje na resolução da equação do segundo grau.

Vamos mostrar como fica:

Resolução:

$$x^2 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x = 0{,}20$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x = 0{,}20$$

$$\Rightarrow 0{,}40x^2 + 0{,}20x = 0{,}20$$

$$\Rightarrow 0{,}40x^2 + 0{,}20x - 0{,}20 = 0$$

$$\Delta = 0{,}20^2 - 4 * 0{,}40 * (-0{,}20) = 0{,}36$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b + \sqrt{0{,}36}}{2a} = \frac{-0{,}20 + 0{,}60}{2 * .40} = \frac{0{,}40}{0{,}80} = \frac{\frac{40}{60}}{\frac{80}{60}} = \frac{40}{60} * \frac{60}{80} = \frac{1 * 30}{2 * 30} = \frac{30}{60} = 0{,}30$$

O valor encontrado é o lado quadrado.

Este paralelo, no entanto, decorre das traduções tendenciosas propostas pelos historiadores mais antigos, que pressupunham, implicitamente, a natureza algébrica da Matemática babilônia. Temos hoje disponíveis trabalhos históricos, como os de. Høyrup, mostrando que estas traduções não eram fiéis ao estilo da Matemática praticada na época. A partir aí, novas traduções foram propostas, que podem nos levar a conclusões bastante distintas sobre a natureza da Matemática nesta cultura. Traduzimos para o português, com algumas simplificações, a nova transcrição proposta em [87].

Exemplo 1.5. (*nova tradução*).

Procedimento: “A superfície e a minha confrontação acumulei: obtive 0,45”

(Estaria suposto que o objetivo era encontrar a confrontação – o lado)

Solução:

1 é a projeção

2. quebre 1 na metade (obtendo 0,30) e retenha 0,30, obtendo 0,15

3. agregue 0,15 a 0,45

4. 1 é o lado igual

5. retire do interior de 1 os 0,30 que você reteve

6. 0,30 é a confrontação

Esta versão motiva uma nova interpretação do procedimento, de natureza geométrica. Em primeiro lugar, faz-se uma “projeção” de 1, que permite interpretar a medida do lado procurado, que chamaremos de *l*, concretamente como um retângulo de lados 1 e *l*. Os babilônios transformavam, por meio de uma projeção, esta linha de comprimento *l* em um retângulo com lados medindo, respectivamente, *l* e 1*l*. Ou seja, eles “projetavam” o lado *l* para que se tornasse o lado de um retângulo com área igual a *l*. (Figura 1.13).

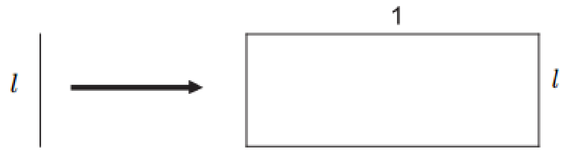


Figura 1.13 – Passo (I): Projeção do lado l

Na figura 1.14, temos um retângulo de lados 1 e um quadrado de lado *l*. Esta figura será ”cortada e colada a fim de se estabelecer uma equivalência entre medidas de áreas que resolva o problema.

No passo (II), ilustrado na Figura 1.15, “quebramos” 1 na metade, o que divide o retângulo inicial em duas partes. Rearrumando as duas metades do retângulo, obtemos a figura 1.15, cuja área é igual à área dada inicialmente (0,45).

Os lados quebrados, na figura em forma de I da Figura 1.15, delimitam um quadrado de lado 0,30 que ”retenho”, ou seja, multiplico por ele mesmo, obtendo a área de um novo quadrado (0*,* 15). Esta área pode ser agregada ao conjunto, completando o quadrado e formando um quadrado maior de área 1 (Figura 1.16).

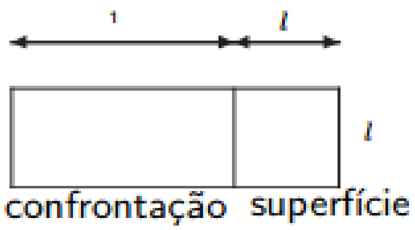


Figura 1.14 – Enunciado: A superfície e a minha confrontação acumulei

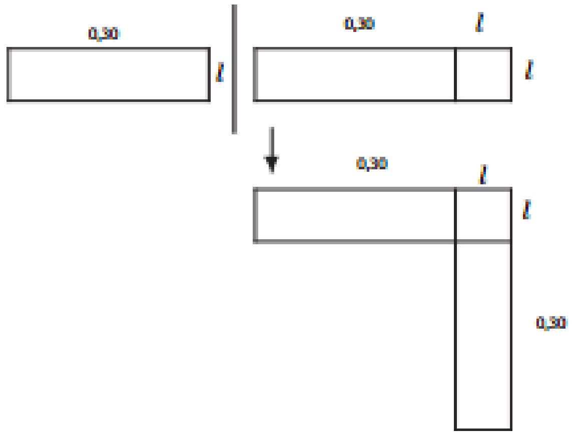


Figura 1.15 – Passo (II): quebre l no meio

Como 1 é o quadrado de 1, 1 é o lado igual. Deste lado, retiro o lado do quadrado menor (0,30). Obtemos, assim, que o lado procurado é 1 - 0,30 = 0,30.

É importante observar que este lado é chamado “confrontação” e o enunciado do problema pede para acumular uma área e uma confrontação. Ou seja, queremos somar a área de um quadrado com o seu lado, que seria a confrontação da área. Para efetuar esta operação, vimos que os babilônios transformavam esta linha em um retângulo, por isso o lado é uma confrontação (da área).

Este lado é chamado “confrontação” e o enunciado do problema pede para acumular uma área e uma confrontação. Ou seja, queremos somar a área de um quadrado com o seu lado, que seria a confrontação da área. Para efetuar este procedimento, os babilônios transformavam, esta linha, digamos de comprimento *l*, em um retângulo com um lado dado por *l* e o outro medindo 1. Sendo assim, eles projetavam o lado *l* na direção oposta à do quadrado, obtendo um retângulo cuja área possui medida igual á do lado em questão.

Este procedimento é interessante, pois, como veremos mais tarde, desde a época grega, e pelo menos até o século XVII, a geometria teve que respeitar a homogeneidade das grandezas. Isto quer dizer que não era permitido somar uma área com um segmento de reta.

O procedimento babilônio mostra que eles não experimentavam nenhuma dificuldade deste tipo, uma vez que possuíam um procedimento concreto para transformar um segmento de reta em um retângulo:

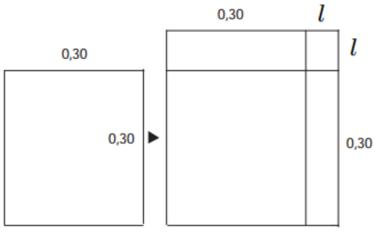


Figura 1.16 – Passos (III) e (IV): Retenha $0,30$ e agregue o resultado a $0,45$. O quadrado maior tem área 1 e lado 1

Aquele que foi traduzido aqui como “projeção”. Høyrup mostra que houve uma fase da Matemática babilônia em que eram considerados segmentos com espessura, que foram substituídos pelos retângulos descritos acima em escritos posteriores, pertencentes a uma tradição de formação de escribas. Exemplos como este, envolvendo operações de “cortar e colar” figuras geométricas parecem ter sido comuns na época. Høyrup caracteriza estas práticas como um tipo de “geometria ingênua”. Apesar de ser bastante plausível a hipótese de que os procedimentos babilônios usavam raciocínios geométricos, seria precipitado concluir que, ao invés de possuírem uma álgebra, eles fizessem geometria. Como já sinalizamos, devemos ter cuidado ao aplicar as definições disciplinares que usamos hoje para caracterizar a Matemática dos povos antigos.