USP- Universidade de São Paulo

Profmat – Mestrado Profissional em Matemática

Barbara Carmona Silva

Sistema de Numeração, Operações e Problemas no Antigo Egito

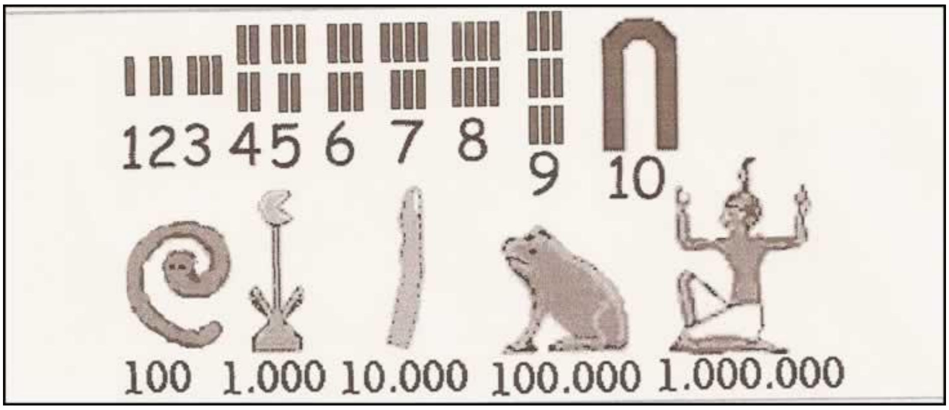
Araraquara – 2020

Sistema de Numeração no Antigo Egito

A civilização egípcia, surgiu a partir do agrupamento de várias tribos africanas e asiáticas, em torno do rio Nilo. O rio era muito importante para a sobrevivência desse novo povo, pois dele era retirado peixes para consumo e água para abastecer suas casas e regar suas plantações. A agricultura era definida pela cheia do Nilo, pois logo que a água baixava as terras ficavam férteis para o cultivo.

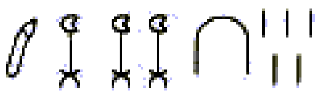
Acredita-se que o sistema de numeração no Antigo Egito, foi desenvolvido por volta de 3000 a. C. sobre o reinado do faraó Sesóstrtis (Boyes, 1996). Esse sistema tinha como base um sistema decimal e aditivo.

O número 1, era representado por uma barra, e os demais até o 9, eram obtidos pela soma correspondente de barras, ou seja, o número 6, era representado por 6 barras verticais. Já os próximos números seguiam uma sequencia de múltiplos de 10, ou seja, o número 10 era representado por uma alça; cem, uma espiral; mil, a flor de lotus; dez mil, um dedo; cem mil, um sapo ou girino e um milhão, um deus com as mãos levantadas. Veja a figura abaixo.



Esse sistema, era utilizado para realizar cálculos que envolviam números inteiros.

Para se ler e escrever um número era simples: os números maiores vinham primeiro e se houvesse mais de uma linha, sempre devemos começar de cima. Por exemplo;

$13\,015 = 1(10^4) + 3(10^3) + 1(10) + 5 =$ 

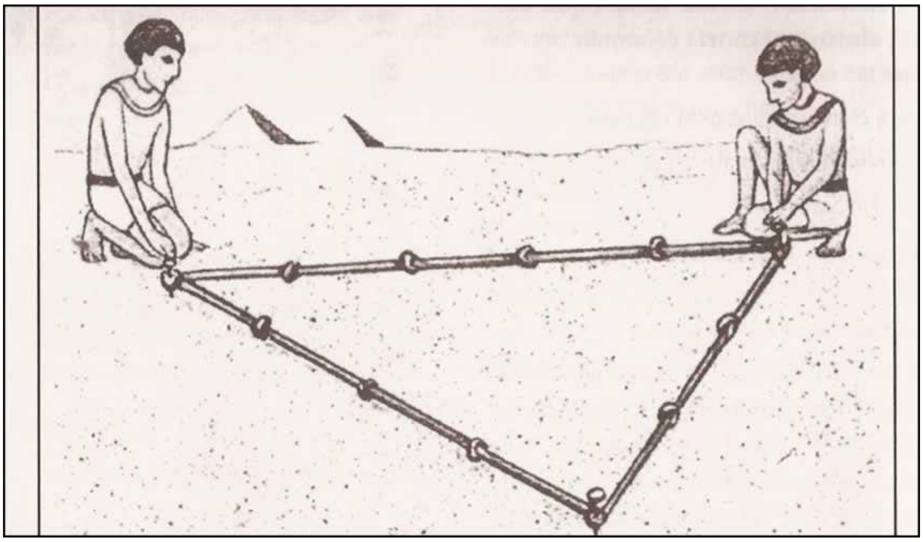
Para o significado dos símbolos, há muitas hipóteses e uma delas é a que o símbolo para o 1 era um pedaço de corda estirado. Juntando vários desses pedaços nós ficamos com um pedaço maior, que se curva. Este pedaço de corda curvado era o símbolo para 10. Juntando mais pedaços de corda nós teríamos uma corda ainda maior, que poderia ser enrolada. O desenho de um rolinho de corda era o que representa 100.

Para representar 1.000 era utilizada a flor de lótus, símbolo da beleza. Para 10.000, os egípcios desenhavam o dedo do faraó, que representava poder; para 100.000, desenhavam um girino ou um sapo, que naquela cultura simbolizava fertilidade. E, finalmente, a representação de 1.000.000 era feita com a figura de um sacerdote louvando os deuses.

Com o passar do tempo, os egípcios viram que apenas o cálculo com os números inteiros, não era suficiente para suas demandas, logo iniciaram com operações que envolviam números fracionários, pois com a baixa do Nilo, havia a necessidade de remarcação de terras, então cabia aos agrimensores do Estado, conhecidos também como esticadores de cordas fazer este trabalho, que era chamado de processo de mensuração.

> Segundo Boyer (1996), o processo de mensuração das terras consistia em estirar cordas e verificar o número de vezes que a unidade de medida estava contida no terreno. Havia uma unidade de medida assinada na própria corda. As pessoas encarregadas de medir esticavam a corda e verificavam quantas vezes aquela unidade de medida estava contida nos lados do terreno.

Daí, serem conhecidos como estiradores de cordas.



Fonte: Toledo(1997, p. 19).

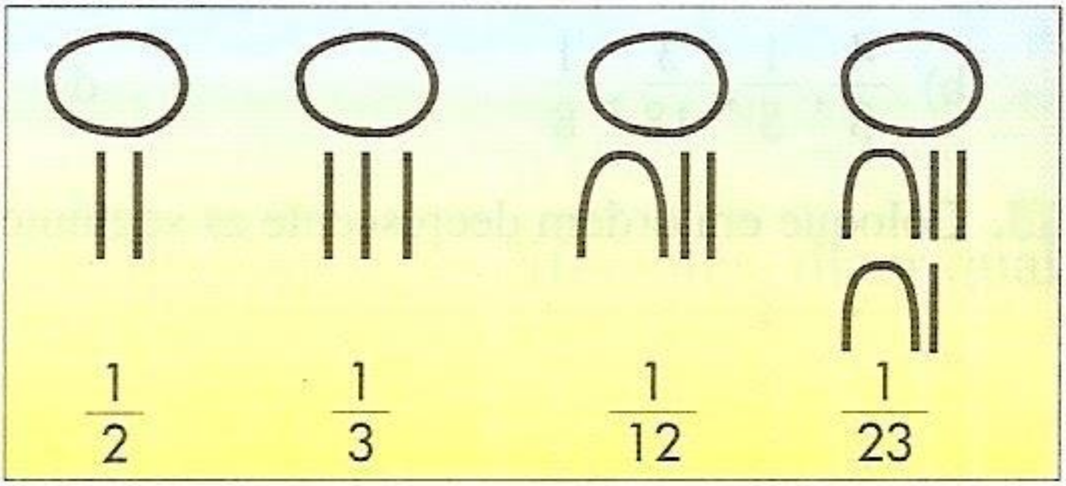
A organização do sistema numérico fracionário usava um conceito equivalente as nossas frações unitárias, da forma $\frac{1}{n}$.

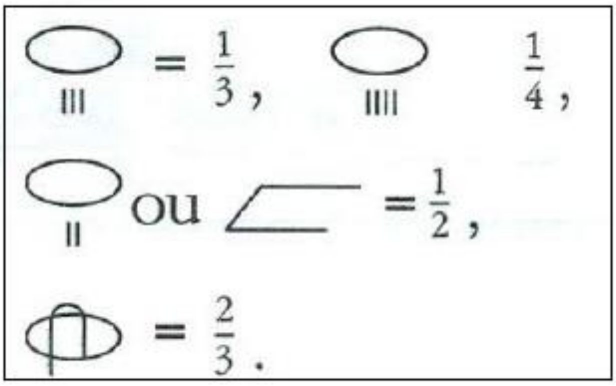
De acordo com Pitombeira,

> Uma fração, com numerador diferente de 1 a ter uma representação no sistema egípcio era a fração $\frac{2}{3}$, e a fração $\frac{1}{2}$ era por vezes representada por um símbolo especial.

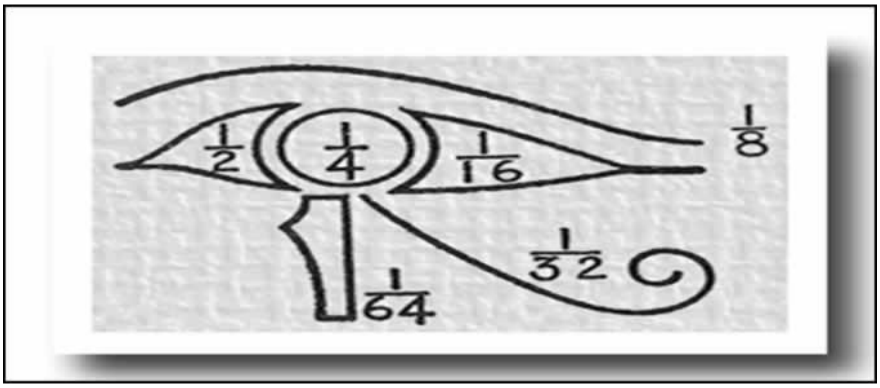
As outras frações eram representadas escrevendo os números inteiros com uma elipse em cima, significando “parte”.

O símbolo oval colocado em cima do número não possui o mesmo sentido daquilo que chamamos hoje de “numerador”. Nosso numerador indica quantas partes estamos tomando de uma subdivisão em um dado número de partes. Na designação egípcia, o símbolo oval, que exprime a palavra “parte” não possui um sentido cardinal mas ordinal. Ou seja, ele indica que, em uma distribuição em n partes iguais, tomamos a n-ésima parte, aquela que conclui a subdivisão em n partes. É como se estivéssemos distribuindo algo por n pessoas e $\frac{1}{n}$ é o quanto a última pessoa irá ganhar.





As frações do tipo $\frac{1}{2^n}$ tinham símbolos especiais, surgindo da associação desses símbolos do $\frac{1}{2}$ até o $\frac{1}{64}$ é o olho de Horus, em que cada fração representaria um sentido.



Fonte: Bakos(2005, p. 60)

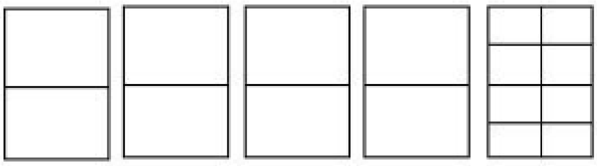
Onde:

- 1/2 representa o olfato;
- 1/4 representa a visão;
- 1/8 representa o pensamento, que seria a sobrancelha;
- 1/16 representa a audição;
- 1/32 representa o paladar, uma linguinha bem comprida;
- 1/64 representa o tato, que seriam as duas perninhas em contato com o mundo embaixo.

Procedimentos de divisão com números inteiros

Exemplo 1: Como repartir a quantidade de grãos contida em 5 sacos de feijão por oito pessoas.

Começamos por imaginar que, se tivéssemos 4 sacos, cada pessoa deveria receber a metade de cada saco. Sendo assim, como são cinco sacos, cada pessoa deve receber, no mínimo, a metade de cada saco, ou seja, $\frac{1}{2}$. Fazendo isso, sobrará um saco, que poderá ser dividido pelas oito pessoas, cada um recebendo mais $\frac{1}{8}$ deste saco. Sendo assim, podemos dizer que o resultado da divisão de 5 por 8 é $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$.



De acordo com o exemplo acima, vemos que para realizar qualquer divisão, primeiramente devemos repartir em dois, depois o que restar, devemos repartir cada parte igualmente até dar o total de pessoas.

Vejamos agora como converter uma fração qualquer em uma soma de frações egípcias antigas?

Exemplo 2: Expressar $\frac{3}{7}$ como uma soma de frações com numerador 1.

Em primeiro lugar, é necessário saber qual a maior fração com numerador 1 menor que $\frac{3}{7}$.

1- Inverto $\frac{3}{7}$ obtendo $\frac{7}{3}$;

2- Tomo o maior inteiro mais próximo da fração obtida (como $2 < \frac{7}{3} < 3$, o maior inteiro é 3);

3- $\frac{1}{3} < \frac{3}{7}$ é a maior fração com numerador 1 menor que $\frac{3}{7}$;

4- Faço $\frac{3}{7} - \frac{1}{3} = \frac{2}{21}$, logo $\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{2}{21}$;

5. Repito o algoritmo para $\frac{2}{21}$.

6- Inverto $\frac{2}{21}$ obtendo $\frac{21}{2}$;

7- Tomo o maior inteiro mais próximo da fração obtida (como $10 < \frac{21}{2} < 11$, o maior inteiro é 11);

8- $\frac{1}{11} < \frac{2}{21}$ é a maior fração com numerador 1 menor que $\frac{2}{21}$;

9- Faço $\frac{2}{21} - \frac{1}{11} = \frac{1}{231}$, logo $\frac{2}{21} = \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$;

10- $\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$.

Operações e problemas do Antigo Egito

Exemplo 1: para multiplicar 16 por 13 fazia-se o seguinte processo:

\1	\16
2	32
\4	\64
\8	\128
13	208

A coluna da direita corresponde ao nosso número para multiplicar, a coluna da esquerda corresponde ao valor que queremos repetir, neste caso, 13 vezes.

Esse processo egípcio repousa sobre o resultado geral, bem conhecido, que todo número natural pode ser escrito como soma de potências de 2. Ou seja, se $n \in \mathbb{N}$, então existe k, número natural tal que,

$$n = \sum_{0}^{k} a_k 2^k = a_0 2^0 + a_1 2^1 + a_2 2^2 \cdots a_k 2^k.$$

Demonstração:

Iniciamos mostrando a existência da representação, usando indução em n. Temos que 1 = 1, 2 = 2, 3 = 1 + 2, 4 = 4, 5 = 4 + 1, 6 = 4 + 2, 7 = 4 + 2 + 1 e, com isso, o resultado vale para todo n ≤ 7. Supõe que o resultado vale até um certo k ≥ 7. Se k + 1 é uma potência de 2, então está provado. Caso contrário, existe j tal que 2^j< k + 1 < $2^{j+1} = 2^j + 2^j$. Logo k + 1 − 2^j≤ k e como qualquer número menor ou igual a k é soma de potências de 2, segue que existem inteiros não negativos 0 ≤ e_0 < e_1 < ... < e_l tais que k + 1 − 2^j = 2^{e_0} +2^{e_1} + ...+ 2^{e_l}. Como k + 1 − 2^j< 2^j segue que 2^{e_0} +2^{e_1} + ...+ 2^{e_l} < 2^j e assim e_l < j. Logo k + 1 = 2^{e_0} +2^{e_1} + ...+ 2^{e_l} + 2^j , com 0 ≤ e_0 < e_1 < ... < e_l< j.

Agora provaremos a unicidade da representação. Supõe que a representação é única até um certo k e que k + 1 = $2^{a_0} + 2^{a_1} + \cdots + 2^{a_r} = 2^{b_0} + 2^{b_1} + \cdots + 2^{b_s}$, com 0 ≤ $a_0 < a_1 < \cdots < a_r$ e $0 \leq b_0 < b_1 < \cdots < b_s$. Então $2^{a_r} \leq 2^{a_0} + 2^{a_1} + \cdots + 2^{a_r} = 2^{b_0} + 2^{b_1} + \cdots + 2^{b_s} \leq 2^0 + 2^1 \ldots + 2^{b_s} = 2^{b_s+1}$. Logo $2^{a_r} < 2^{b_s+1}$ e assim a_r < b_s + 1, ou seja, $a_r \leq b_s$. De maneira análoga podemos mostrar que $b_s \leq a_r$ e, portanto, a_r = b_s. Usando a hipótese de indução concluímos que r − 1 = s − 1 e que $a_i = b_j$, para i, j ∈ {0, 1, ... , r − 1}. Portanto está provada a unicidade.

c.q.p.

Exemplo 2: Multiplique, como os egípcios, 27 por 15, ou seja, tome 15 vezes o número 27.

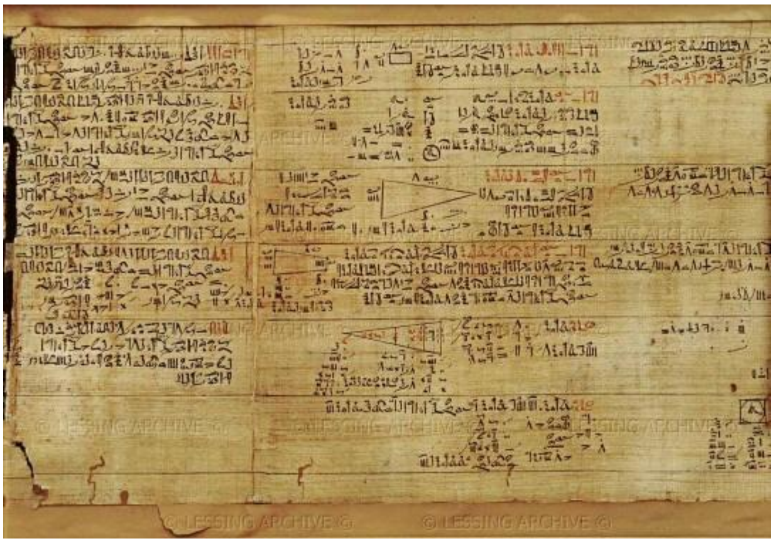
Temos:

\1	27
\2	54
\4	108
\8	216
16	432

$$1 + 2 + 4 + 8 = 15 \Longrightarrow 27 \times 15 = 27 + 54 + 108 + 216 = 405.$$

O povo egípcio utilizava os papiros como utensílio de escrita. A decifração destes, só foi possível graças a Thomas Young e a Jean François Champollion, em 1799, com a ajuda de uma pedra muito especial, a pedra da Rosetta.

O papiro Rhind ou Ahmes mede 5,5 m de comprimento por 0,32 m de largura, datado aproximadamente no ano 1650 a.C. onde encontramos um texto matemático na forma de manual prático que contém 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo.



Papiro de Ahmes

A divisão, “dividir a por b” é o mesmo que “por quanto multiplicar b para obter a”.

Os exemplos abaixo, foram retirados do papiro de Ahmes.

Exemplo 3: Divida 19 por 8, ou seja, por quanto se deve multiplicar 8 a fim de obter 19.

$$\begin{array}{rc} 1 & 8 \\ \backslash 2 & 16 \\ \dot{2} & 4 \\ \backslash\ \dot{4} & 2 \\ \backslash\ \dot{8} & 1 \end{array}$$

$$\text{A resposta é } 2\,\dot{4}\,\dot{8}.$$

Que é o mesmo que $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

Regra da Falsa Posição

A regra da falsa posição consiste me resolver problemas do tipo ax=b, utilizando somente aritmética da época. Vejamos:

Escolha um valor arbitrário x_0 e calcule então o valor de ax_0, que chamaremos de b_0. Na prática, x_0 é escolhido a fim de facilitar as contas. Assim, por exemplo, se a é uma fração com denominador 53, é conveniente escolher $x_0 = 53$. Eliminando os denominadores, tornando os cálculos mais simples.

Consideremos então a igualdade

$$ax_0 = b_0.$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por $\frac{b}{b_0}$ temos:

$$ax_0 \times \frac{b}{b_0} = b_0 \times \frac{b}{b_0}.$$

$$a \times \left(x_0 \times \frac{b}{b_0}\right) = b_0 \times \frac{b}{b_0} = b.$$

$$x_0 \times \left(\frac{b}{b_0}\right)$$

Assim, a solução é,

$$ax = b.$$

A regra da falsa posição é apenas um dos métodos utilizados pelos egípcios para resolver problemas mais complexos.

Exemplo 1: Considere, agora, o seguinte problema do papiro de Ahmes (Problema 24).

Uma quantidade, com 1/7 dela adicionado, torna-se: 19. Em primeiro lugar, resolvamos o problema como faríamos hoje.

O problema se transforma em resolver a equação,

$$x + \frac{1}{7}x = 19 \Longleftrightarrow \frac{8}{7}x = 19 \Longleftrightarrow x = \frac{19 \times 7}{8} = \frac{133}{8}.$$

Uma outra solução seria usar a regra de falsa posição, procedendo como segue:

Se a quantidade procurada fosse igual a 7, teríamos que ela mais 1/7 dela seria igual a 8. Como a resposta deve ser 19, multiplicaremos os dois membros da igualdade

$$7 + \frac{1}{7} \times 7 = 8$$

Por $\frac{19}{8}$, obtendo

$$\left(7 \times \frac{19}{8}\right) + \frac{1}{7} \times \left(7 \times \frac{19}{8}\right) = 19 \times \frac{19}{8} = 19.$$

Assim, 7 x $\frac{19}{8}$ = $\frac{133}{8}$ é a raiz procurada.

Chegaremos ao mesmo resultado procedendo como segue, usando notação algébrica para tornar os passos do processo de falsa posição mais transparentes:

Faça x_0 = 7. Temos, então, que

$$x_0 + \frac{1}{7}x_0 = 8.$$

Multipliquemos os lados da igualdade por $\frac{19}{8}$.

$$\frac{19}{8}x_0 + \frac{19}{8}\frac{1}{7}x_0 = \frac{19}{8} \times 8 = \frac{19}{8}x_0 + \frac{1}{7}\frac{19}{8}x_0 = 19.$$

Como x_0 = 7, e colocando $\frac{19}{8}$ em evidência, vemos facilmente que

$$\frac{19}{8}x_0$$

é realmente a solução do problema. Guarde este resultado a fim de compará-lo com o que obtivermos resolvendo o mesmo problema como no papir Ahmes. Salientamos que o procedimento imediatamente acima, que utiliza notação algébrica, é estranho à regra de falsa posição. É somente uma explicação, em linguagem algébrica moderna, de porque ela funciona.

Vejamos agora a solução apresentada no papiro:

\1	7	faça como mostrado
\ $\dot{7}$	1	
1	8	A quantidade
\2	16	$\dot{7}$ 2 $\dot{4}$ $\dot{8}$
$\dot{2}$	4	pedido 19
\ $\dot{4}$	2	Total
\ $\dot{8}$	1	
\1	2 $\dot{4}$ $\dot{8}$	
\2	4 $\dot{2}$ $\dot{4}$	
\4	9 $\dot{2}$	

A solução apresentada pelo escriba está disposta em três blocos, com 2, 5 e 3 linhas, respectivamente. Analisemos cada um deles.

O primeiro bloco simplesmente faz $x_0 = 7$, e calcula $x_0 + \frac{1}{7}\,x_0 = 8$. Percebe-se aqui a conveniência dessa escolha para x_0.

O segundo bloco divide 19 por 8, chegando ao resultado $2\dot{4}\,\dot{8}$. Esse resultado é igual exatamente a $\frac{19}{8}$.

O terceiro bloco multiplica $2\dot{4}\,\dot{8}$ por 7, obtendo

$$2\dot{4}\dot{8}4\dot{2}\dot{4}9\dot{2} = 15 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 16\dot{2}\dot{8} = \frac{133}{8},$$

que é o resultado procurado.

Bibliografia

Sistema de Numeração do Antigo Egito. Disponível em < https://meuartigo.brasilescola.uol.com.br/matematica/o-sistema-numeracao-egipcio.htm#:~:text=e%201.000.000.,O%20sistema%20de%20numera%C3%A7%C3%A3o%20eg%C3%ADpcio%20baseava%2Dse%20em%20sete%20n%C3%BAmeros,dobrado%20valia%2010.000%2C%20um%20girino > Acesso em Setembro 2020

Matemática no Antigo Egito. Disponível em: < http://www.mat.uc.pt/~mat0703/PEZ/antigoegito2%20.htm > Acesso em Setembro 2020.

BOYER, Carl Benjamim. História da matemática. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Ed. Edgard, 1996.

BAKOS, Margaret Marchiori (org.). O Imperador na Terra dos Faraós. Revista Nossa História, São Paulo, jan. 2005, n. 15, v. 2.

TOLEDO, M. Didática de matemática: como dois e dois: a construção da Matemática. São Paulo: FTD, 1997.