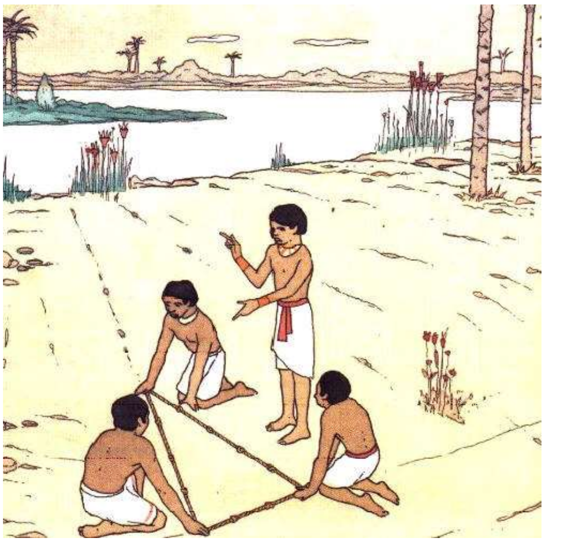
Mestrado Profissional em Matemática – Profmat

Bianca Panhan

Tópicos da História da Matemática

Seção 1.6 e 2.1

Conhecimentos geométricos na Babilônia e no Egito



A “geometria” dos babilônios e egípcios era essencialmente uma geometria métrica, isto é, preocupada em calcular comprimentos, áreas e volumes, para o que utilizavam algumas propriedades geométricas de figuras planas e de sólidos geométricos, sem que saibamos como chegaram a estes resultados.

Como ainda hoje acontece na Matemática escolar, os exemplos de problemas babilônios e egípcios as vezes são bem artificiais, modelos simplificados de situações reais propostos para exercitar ou verificar as habilidades de cálculo dos escribas.

Cálculo de áreas na Babilônia

Baseada no estudo do tablete YBC 7302 (Figura 1), entre outros, a maneira como os babilônios consideravam o círculo era fundamentalmente diferente da nossa.

Conceitualmente, para nós, o círculo é obtido traçando-se uma circunferência com um compasso (Axioma 3 de Euclides). Para os babilônios, ele era concebido como a figura limitada por uma circunferência. Mesmo quando conheciam o diâmetro do círculo, eles calculavam sua área usando o comprimento da circunferência.

Se observarmos a figura 1, encontramos os números, em representação sexagesimal, 3 (a circunferência do círculo), 9 e 45 (a área do círculo).

Figura 1: tablete YBC 7302

Se A é a área do círculo de circunferência S e raio r, então, $A = \pi r^2$, $S = 2\pi r$. Assim,

$$r = \frac{S}{2\pi},$$

$$A = \pi \times \frac{S^2}{4\pi^2} = \frac{1}{4\pi} S^2.$$

Se fizermos $\pi = 3$, teremos:

$$A = \frac{1}{12} S^2.$$

Como, no sistema sexagesimal, 1/12 = 5, veremos que, de fato, a área do círculo do tablete foi encontrada desta maneira. Com base nesta tradução, afirma-se frequentemente que a aproximação π = 3 era padrão, para os babilônios ou que, em casos especiais, eles usavam 3, 07; 30 (o que, em nosso sistema, é igual a 3 + 1/8). No entanto, esta interpretação é anacrônica.

Conceitualmente, há uma grande diferença entre o que fazemos e os procedimentos dos babilônios. Para nós, π é uma constante de proporcionalidade, que relaciona a área e o quadrado do raio de um círculo qualquer, ao passo que os babilônios tinham um processo para calcular a área de círculos no qual dividiam o quadrado da circunferência do círculo por 12.

Figura 2: tablete YBC 7290

Voltemo-nos agora para o tablete YBC 7290 (Figura 2), que mostra um trapézio. Vemos que sua base maior e um dos lados são iguais a 2, 20 (no sistema sexagesimal), e que a base menor é igual a 2. O escriba supõe que o trapézio é reto e, então, sua área é calculada fazendo (sem os símbolos)

$$A = 2,20 \times [\tfrac{1}{2} \times (2,20 + 2)]$$

A geometria no Antigo Egito

O que significa falar de geometria no Egito antigo? Significa falar de procedimentos de cálculo de áreas e de volumes. Por exemplo, a área de um retângulo era calculada multiplicando sua base por sua altura. O problema nº 6 do Papiro de Moscou ilustra bem o procedimento empregado:

Exemplo 1.13. *Método para calcular um retângulo*
Se lhe é dito, um retângulo de área 12 $\overline{2}\,\overline{4}$ *do comprimento*
Para o comprimento. Calcule $\overline{2}\,\overline{4}$ *até obter* 1. *Resultado* 1 $\overline{3}$.
Calcule com estes 12, 1 $\overline{3}$ *vezes. Resultado* 16.
Calcule [*sua raiz quadrada*]. *Resultado* 4 *para o comprimento.*
$\overline{2}\,\overline{4}$ *é* 3 *para a largura.*

Em linguagem moderna, teríamos

$$A = lb \quad \text{e} \quad b = (\overline{2}\ \ \overline{4}) \Longrightarrow l \times (\overline{2}\ \ \overline{4})l = 12.$$

Assim,

$$l \times l = 12 \div (\overline{2}\ \ \overline{4}) = 12 \times\ 1\ \ \overline{3} = 16.$$

Segue-se então que o comprimento l é igual a 4 e que $\overline{2}\ \ \overline{4}$ da largura (altura) é 3.

Problema 50 (Papiro Rhind): Calcular uma porção de terra circular, cujo diâmetro é de 9 varas. Qual a sua superfície?

Subtrair 1 da nona parte dela. Resta 8; então multiplicar oito vezes oito, resultado 64. A superfície é de 6 kha e 4 setat.

Modo de realizar a operação:

1 9

$\frac{1}{9}$ daquilo 1

Subtrai daquilo, resta 8

1 8

2 16

4 32

8 64

Resposta: a superfície da terra é de 60kha (escrito 60) e 4 setat

Ao discutir a geometria no Egito antigo, é inevitável perguntar o que era conhecido, então, sobre a geometria da pirâmide. A resposta, baseada nos documentos matemáticos egípcios que chegaram até nós, é decepcionante. Segundo Gillings ([68], pp. 185 - 186), as únicas coisas que sabemos, com certeza, sobre seus conhecimentos deste assunto são as seguintes:

1. A inclinação dos lados de uma pirâmide.

2. O volume de um tronco de pirâmide.

3. O volume de uma pirâmide.

Exemplo 1.14. Exemplo de um triângulo de terreno. Suponha que lhe é dito, qual a área de um triângulo de lado 10 khet e base 4 khet?

Resolva o problema da seguinte maneira:

1 400

½ 200

1 1000

2 2000

Sua área é 20 setat.

Retire ½ de 4, a fim de obter seu retângulo. Multiplique 10 vezes 2; isso é a área.

Exemplo 1.15. Fazer um celeiro (ou um cilindro) redondo de 9 por 10.

A primeira parte do problema consiste em calcular a área da base, em forma de circunferência, cujo diâmetro é 9, e a segunda parte em calcular o volume em grãos se a sua altura é 10

O procedimento empregado para resolver a primeira parte é o seguinte:

Subtraia $\frac{1}{9}$ de 9 de 9: 1. Resta: 8. Multiplique 8 por 8; obtendo 64.

A área da circunferência de base seria, portanto, 64. Mas de onde veio esta subtração de $\frac{1}{9}$ do dado? Ela não está relacionada ao fato de o lado ser 9. Este valor, $\frac{1}{9}$, é uma constante que devia ser aprendida e utilizada pelos egípcios sempre que quisessem calcular a área de uma circunferência (multiplicando esta constante pelo diâmetro). Sempre que fosse necessário calcular esta área, o diâmetro deveria ser multiplicado por $\frac{1}{9}$ do lado e subtraída na primeira etapa do procedimento citado.

Capítulo 2 -

O nascimento do método dedutivo e a geometria de Euclides

Contextualização histórica

É muito comum ouvirmos que a geometria surgiu às bordas do Nilo, devido às enchentes e à necessidade de medir a área das terras a serem redistribuídas entre aqueles que haviam sofrido prejuízos. Esta hipótese tem sua origem nos escritos de Herôdoto:

"[Quando das inundações do Nilo,] o rei Sésostris enviava pessoas para inspecionar o terreno e medir a diminuição dos mesmos para atribuir ao homem uma redução proporcional de impostos. Aí está, creio eu, a origem da geometria que migrou, mais tarde, para a Grécia". (Herôdoto, Oeuvres complètes II 109, p.183).

Por outro lado, Aristóteles afirma que a Matemática surgiu "[. . .] em lugares nos quais as pessoas dispunham de lazer. Esta é a razão de a Matemática ter surgido primeiro no Egito; pois aí a casta dos sacerdotes tinha permissão para desfrutar de lazer." (Aristóteles, Metafísica, 981b20-25, apud [75], pp. 258- 259.)

Influenciado pela Matemática egípcia, Pitágoras teria introduzido um tipo de Matemática abstrata na Grécia. A narrativa histórica tradicional enfatiza a transição do tipo de Matemática realizada pelos babilônios e egípcios, profundamente marcada por cálculos e algoritmos, para a Matemática teórica, praticada pelos gregos, fundada em argumentações consistentes e demonstrações.

Por volta do século VII a.E.C., o crescimento populacional e a dispersão dos gregos pela bacia do Mediterrâneo deram origem à mais importante instituição da antiguidade grega, que foi determinante para a organização política, administrativa, religiosa e militar da Grécia durante os séculos V e IV a.E.C. Trata-se da polis – a cidade-estado grega.

O pensamento racional foi se constituindo neste contexto e ganhou impulso neste novo tipo de organização. Surgiu então, na Grécia, a ideia de que quem soubesse persuadir sempre poderia convencer os outros de que sua tese era verdadeira. A partir do final do século V a.E.C., Platão e Aristóteles buscaram propor maneiras de selecionar os tipos de afirmação que alguém pode fazer, distinguindo os raciocínios falsos dos corretos e estabelecendo critérios de verdade. Em um mundo no qual as opiniões se multiplicavam, era necessário selecionar os argumentos, estabelecer critérios para decidir quem tinha razão.

Mais tarde, Aristóteles desenvolverá uma lógica, na qual os critérios de verdade estarão mais ligados à pura coerência, ao rigor da demonstração. Ou seja, em uma cadeia de conclusões, tudo deve decorrer daquilo que antes foi dito, sem que haja contradição no interior do raciocínio. Platão e Aristóteles se serviram da Matemática para constituir este novo ideal de pensamento.

Grande parte do conhecimento de que dispomos hoje sobre a Matemática da época é indireto, proveniente de escritos como os de Platão, Aristóteles, Euclides e Proclus. No final do século VII a.E.C., diversas realizações tecnológicas podem ter contribuído para o desenvolvimento da Matemática. Alguns termos de geometria já apareciam, por exemplo, na arquitetura. Há escritos técnicos do século VI a.E.C. tratando de problemas relacionados à astronomia e ao calendário. Neles intervinham alguns conceitos geométricos, como círculos e ângulos.

As evidências mostram que havia uma Matemática grega antes dos pitagóricos. Parecia ser comum a construção de soluções para problemas geométricos e a comparação de grandezas geométricas por meio de razões. Sendo assim, ainda que não possamos dizer que a transformação dos fundamentos da Matemática grega é devida a Platão, ele expressa o descontentamento dos filósofos com os métodos empregados e articula o trabalho dos pensadores à sua volta para que se dediquem a formalizar os conceitos e técnicas utilizadas indiscriminadamente na Matemática da época.

A descoberta das grandezas incomensuráveis, frequentemente atribuída a um pitagórico, deve ter tido outras origens. Esta descoberta contribuiu para a separação entre a geometria e a aritmética, a primeira devendo se dedicar às grandezas geométricas e a segunda, aos números. Esta separação é um dos traços marcantes da geometria grega, ao menos na maneira como ela se disseminou com Euclides.

A consequência da descoberta dos incomensuráveis que mais gostaríamos de enfatizar neste trabalho é a separação do universo das grandezas do universo dos números. A necessidade de demonstração surge com os gregos a partir deste momento chave da história da geometria. A descoberta dos incomensuráveis nos leva a desconfiar dos sentidos, uma vez que eles não permitem “enxergar” a possibilidade de dois segmentos não serem comensuráveis. E necessário, portanto, demonstrar, fundar a geometria sobre bases mais sólidas do que aquelas que podem ser fornecidas pela intuição. Com esta transformação, ganha destaque o espaço abstrato sobre o qual fundamos, até hoje, a Matemática.

Os Elementos de Euclides representam, neste contexto, o resultado dos esforços de formalização da Matemática para apresentar uma geometria consistente e unificada que valesse para grandezas quaisquer, fossem elas comensuráveis ou incomensuráveis.

Trataremos a seguir de alguns resultados, dentre os mais significativos que se encontram nos Elementos. Em primeiro lugar, ela expõe, de maneira organizada, a Matemática elementar que os gregos da época clássica tinham criado e desenvolvido. Assim, muito do que sabemos da Matemática grega deve-se a esta obra de Euclides. Em segundo lugar, como os Elementos constituem a mais antiga exposição organizada de Matemática que nos chegou, eles muito influenciaram seu desenvolvimento posterior.

Nosso objetivo será mostrar que, se existiu uma “Matemática pitagórica”, tratava-se de uma prática bastante concreta. Mesmo o famoso teorema “de Pitágoras”, em sua compreensão geométrica como relação entre medidas dos lados de um triângulo retângulo, não parece ter sido particularmente estudado por Pitágoras e sua escola. Outro objetivo deste capítulo é desconstruir os mitos envolvidos na chamada “crise dos incomensuráveis”.

Referência Bibliográfica:

ROQUE, Tatiana; PITOMBEIRA, João Bosco. Tópicos da História da Matemática.

PEDROSO, Hermes Antonio. História da Matemática. Setembro/2009