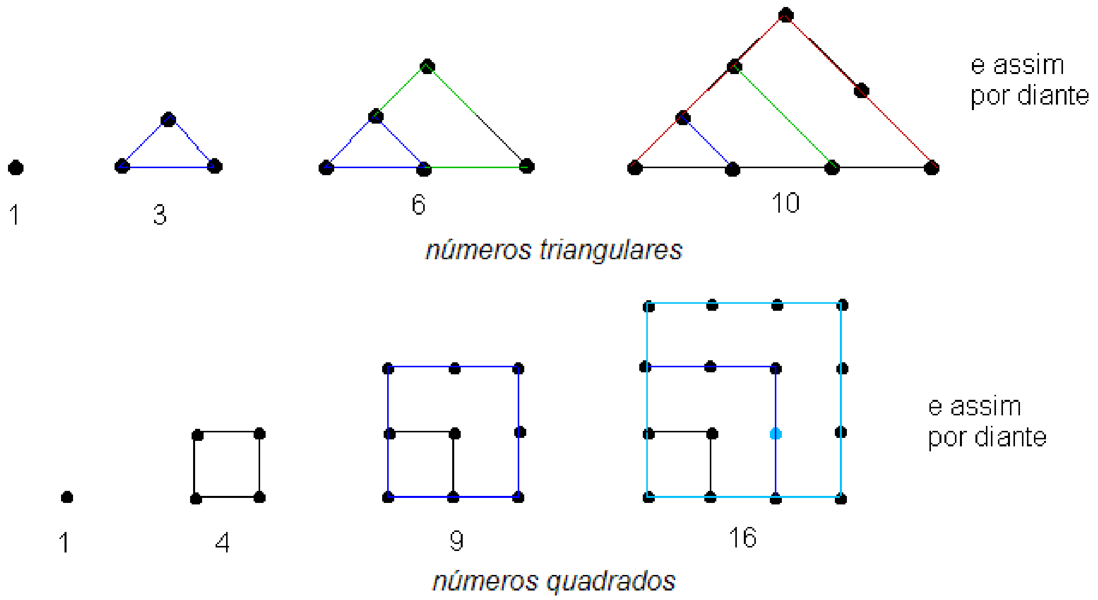
Breno Puertas de Freitas e Silva, 6791780

Matemática e Grécia Antiga antes de Euclides

Pitágoras é referenciado, de modo frequente, como o criador da Matemática grega e a sua teoria dos números tinha por base trabalho com números figurados, ou seja, “números que podem ser representados por um conjunto de pontos equidistantes, formando figuras geométricas”[1], como, por exemplo:




Ele estudava aritmética sem o uso de provas e pelo método que hoje é conhecido como indutivo, ou seja, considera, de modo empírico, um número grande de situações particulares, em seguida, generaliza[2].

Para os pitagóricos, os números eram utilizados para fins práticos e as propriedades destes eram associadas a forças cósmicas (estrutura universal em sua totalidade[3]), que também pode ser entendia como centelha divina[4], e não podiam ser consequências lógicas de suas estruturas. Isto acontece porque, a filosofia que influenciou as ideias dos gregos antigos era do tipo espiritualista, a qual estava integrada

[1] Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_figurado, acessado em 14/09/2020.

[2] Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_indutivo, acessado em 14/09/2020.

[3] Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Cosmo, acessado em 14/09/2020.

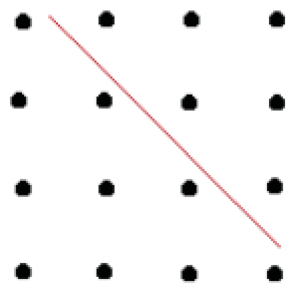
[4] Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=V6yHVK2svs8&t=589s&ab_channel=InstitutoBorborema, acessado em 14/09/2020.

ao desenvolvimento do ser humano e as teorias novas surgiam observando a natureza e de problemas do cotidiano da população[5].

Continuando o assunto dos números figurados, na imagem da página anterior, há dois exemplos deles e, de modo análogo a matemática atual, os números triangulares podem ser representados como 1, 3, 6, 10 e assim por diante, formando uma sequência. Consequentemente, o número triangular de ordem $\mathrm{n}$ é dado pela sequência $1 + 2 + 3 + \cdots + \mathrm{n} = \frac{n(n+1)}{2}$. Já os números quadrados podem ser escritos como $n^2$.

Observando as configurações, os pitagóricos chegaram a diversas conclusões como:

- "Todo número quadrático é a soma de dois números triangulares sucessivos." (Roque, p.71).



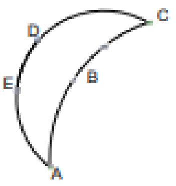
Pela notação matemática atual, o enunciado acima pode ser escrito como $\mathrm{n}^2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}$.

O tipo de problema que hoje é conhecido por "tripla pitagórica" consiste em encontrar dois números inteiros, elevar cada um ao quadrado, somar ambos e o resultado tem que ser um número quadrado. Ele também é conhecido por "Teorema de Pitágoras".

Conforme mencionado em parágrafos acima, Pitágoras não utilizou de demonstrações nos estudos que desenvolveu e não se conhece nenhuma prova deste teorema que tenha sido desenvolvida pelos pitagóricos.

Após Pitágoras, a geometria começou a ser desenvolvida na Grécia pré-euclidiana, a qual não há nenhuma relação como os pitagóricos, segundo os indícios. Um dos estudiosos da geometria chamava-se Hipócrates de Quios, que viveu na segunda metade do século quinto a.E.C. Um dos assuntos estudados foram as **lúnulas de Hipócrates** que são os primeiros exemplos de figuras limitadas por linhas curvas cujas áreas foram encontradas. Segue um exemplo abaixo:

[5] Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=V6yHVK2svs8&t=589s&ab_channel=InstitutoBorborema, acessado em 14/09/2020.

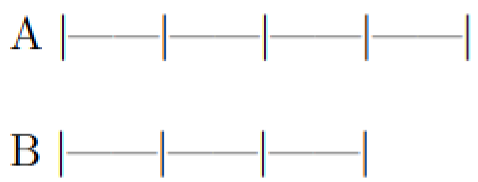



Ao que parece, o estudo das lúnulas surgiu do problema de encontrar a quadratura do círculo. Encontrar a quadratura significa fazer um quadrado de mesma área da região, com o objetivo de encontrar a área desta.

Próximo assunto, que está associado a geometria, é sobre o problema da incomensurabilidade, ou seja, problema de dois objetos que não têm uma medida em comum. Recordando que na época não existia números reais, intuitivamente, dois objetos de mesma grandeza têm sempre a característica de possuir uma unidade de medida comum, o que é uma contradição, pois, mesmo que possamos dividi-los em partes muito pequenas, nem sempre é possível encontrar uma parte que caiba um número inteiro de vezes em ambos.

Lembrando que "medir" significa, basicamente, "comparar", quando vamos medir, o primeiro passo consiste em escolher a unidade de medida. Cada grandeza é associada ao número inteiro de unidades de medida a qual é composta. Consequentemente, a medida possibilita a correspondência entre qualquer grandeza a um número natural, ou a um conjunto de naturais.

Para realizar esta atividade, em muitas situações é necessário subdividir uma das grandezas para encontrar uma unidade de medida que caiba um número inteiro de vezes em ambas as grandezas a serem comparadas. Por exemplo, suponha que queiramos comparar dois seguimentos $\mathrm{A}$ e $\mathrm{B}$, vamos observar a figura abaixo:




Notamos que $\mathrm{B}$ não cabe um número inteiro de vezes em $\mathrm{A}$, então dividimos $\mathrm{B}$ em 3 e consideramos a unidade como um terço de desta. Observando que a unidade cabe 4 vezes em $\mathrm{A}$, concluímos que a comparação entre ambas nos fornece a razão $4{:}\ 3$. A partir de situações como esta que surgiu o conjunto dos números racionais.

Este tipo de problema foi descoberto pela geometria grega antiga por volta de 430 e 410 a.E.C. Platão e Aristóteles, que viveram no século IV a.E.C., abordam esta situação, comparando o lado e o diâmetro de um quadrado e citam matemáticos como Teodoro e Teeteto.

Relembrando o que conversamos acima sobre números figurados, este assunto fazia parte da aritmética, os problemas de incomensurabilidade fazem parte da geometria e não há intersecção entre ambos.

No século quarto a.E.C., Aristóteles abordou a ideia da prova da incomensurabilidade, escrevendo:

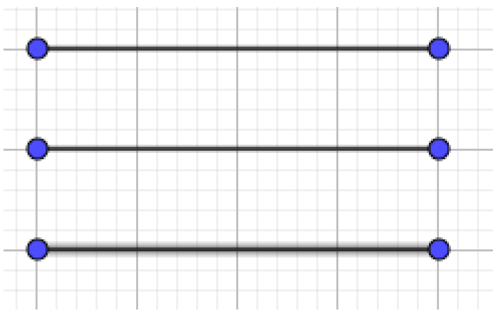
> "[...] se o lado e o diâmetro considerados comensuráveis um em relação ao outro, pode-se deduzir que os números ímpares são iguais aos pares; esta contradição afirma, portanto, a incomensurabilidade das duas grandezas" (Roque, p. 62).

Pela frase acima, podemos notar que na demonstração da incomensurabilidade, é utilizada a ideia de prova por absurdo.

Uma das ferramentas associada ao estudo das grandezas incomensuráveis é o da **antifairese**, também chamado de **subtrações recíprocas**. Ela possibilita definir e comparar razões sem o uso de números racionais.

### A antifairese entre a diagonal e o lado de um quadrado

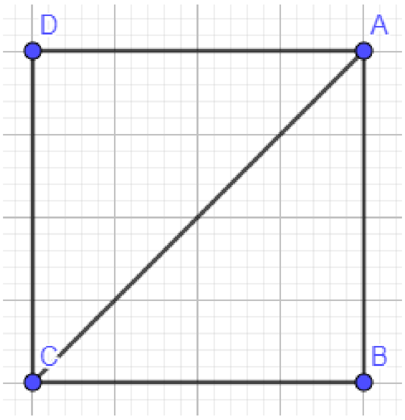
Recordando que, medir significa comparar, observe a figura abaixo:



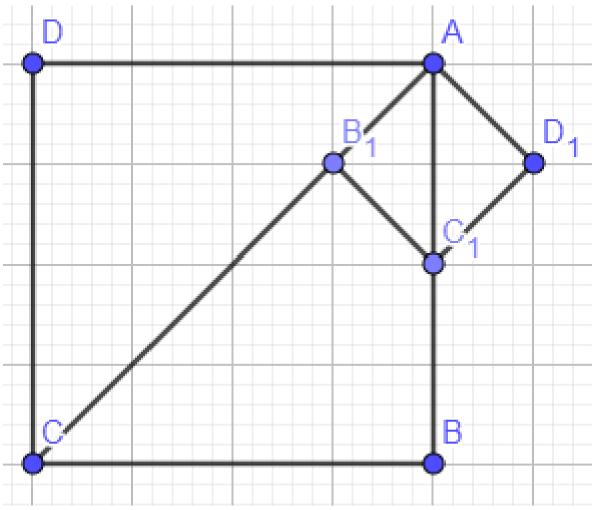
Para provar que dois objetos são incomensuráveis, utilize a demonstração por absurdo e compare a medida de ambos a um terceiro, que pode ser definido como uma unidade, já que na época não existe régua milimetrada. Com isto, provaremos abaixo que o lado e a diagonal de um quadrado não são comensuráveis.

Seja $\mathrm{ABCD}$ quadrado de lado $\mathrm{AB}$ e diagonal $\mathrm{AC}$. Suponha que $\mathrm{AB}$ e $\mathrm{AC}$ sejam comensuráveis, então existe uma semirreta $AP$ que mede $\mathrm{AB}$ e $\mathrm{AC}$.

Primeiramente, vamos construir um quadrado menor que $\mathrm{ABCD}$ de modo que um dos lados esteja sobre $\mathrm{AC}$ e a diagonal sobre $\mathrm{AB}$.

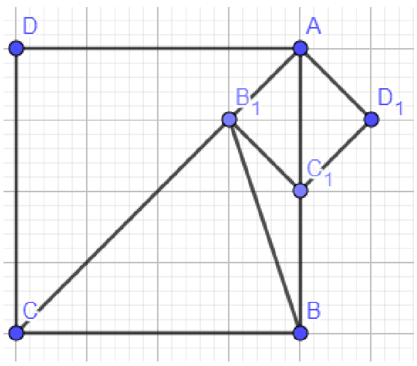



Seja $B_1$ ponto em AC de modo que $B_1\mathrm{C} = AB$. Coloque um ponto $C_1$ sobre AB tal que $B_1C_1$ seja perpendicular a AC, agora construa um quadrado $\mathrm{AB_1C_1D_1}$ de lados $AB_1 = C_1D_1$ e diagonal $\mathrm{AC_1}$ sobre AB.




Esta construção é possível, pois $\angle \mathrm{CA}B = \angle B_1AC_1 = \frac{\pi}{4}$ e $\angle AB_1C_1 = \frac{\pi}{2}$, assim $\angle AC_1B_1 = \frac{\pi}{4}$ e $AB_1C_1$ é um triângulo isósceles com $AB_1 = B_1C_1$.

Mas como, por construção, $BC = B_1C$, o triângulo $BCB_1$ é isósceles e temos que $\angle B_1BC = \angle BB_1C \Rightarrow \angle B_1BC_1 = \angle BB_1C_1$. Consequentemente, $B_1C_1B$ também é isósceles e, portanto, $BC_1 = B_1C_1$.



Podemos notar o surgimento de um novo quadrado, $AB_1C_1D_1$, e temos:

$$AB_1 = AC - B_1C = AC - AB$$

$$AC_1 = AB - BC_1 = AB - B_1C_1 = AB - AC_1 = AB - AC + AB = 2AB - AC$$

Assim, se $AC$ e $AB$ são comensuráveis com relação a unidade de medida $AP$, $AB_1$ e $AC_1$ também o serão.

Utilizando o mesmo raciocínio, podemos construir outros quadrados menores a partir do $AB_1C_1D_1$. Seguindo, indefinidamente, para qualquer escolha inicial de $AP$, obteremos um quadrado de lado $AB_n$ e diagonal $AC_n$, comensuráveis em relação a $AP$, de modo que $AB_n < AC_n < AP$, o que é uma contradição.

Logo, não existe uma semirreta $AP$ que meça $AB$ e $AC$ e, portanto, $AB$ e $AC$ não são comensuráveis.

---

Segue abaixo o link do vídeo utilizado para a criação deste material:

https://www.youtube.com/watch?v=V6yHVK2svs8&t=589s&ab_channel=InstitutoBorborema

Referência Bibliográfica:


- ROQUE, Tatiana; PITOMBEIRA, João Bosco. **Tópicos em História da Matemática.**
- http://www.matematica.br/historia/nfigurados.html, acessado em 14/09/2020.
- https://pt.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_figurado, acessado em 14/09/2020.
- https://pt.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_indutivo, acessado em 14/09/2020.
- https://www.youtube.com/watch?v=V6yHVK2svs8&t=589s&ab_channel=InstitutoBorborema, acessado em 14/09/2020.
- https://www.geogebra.org/classic?lang=pt_PT, acessado em 16/09/2020.