Universidade de São Paulo

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Mestrado Profissional em Matemática

Teoria dos números – Livros VII, VIII e IX

Livro XII – Áreas e volumes. O método de exaustão de Eudoxo

A transmissão dos Elementos

PMA5631 - Tópicos de História da Matemática

Gevair Norberto de Souza

Nº USP 7961990

Ibaté/SP

Setembro de 2020

Teoria dos números – Livros VII, VIII e IX

Em *Elementos* de Euclides, há uma separação na forma no tratamento dos números e das grandezas, entretanto, ambos são representados de uma mesma forma, por segmentos de retas. Temos os números sendo tratados como agrupamentos de unidades que não ação divisíveis. Já as grandezas geométricas são divisíveis em partes, gerando elementos da mesma natureza. Nota-se que a medida está presente nos dois casos, entretanto são analisadas de formas diferentes.

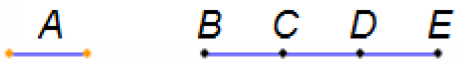
As primeiras definições do livro VII apresentam a noção de número e o papel da medida.

Definição VII.1: A unidade é aquilo segundo o que cada uma das coisas existentes é dita "uma".

Definição VII.2: O número é uma multiplicidade composta de unidades.

Definição VII.3: Um número é uma parte de um número, o menor do maior, quando ele mede o maior.

Da definição 1, pretende-se definir a unidade como sendo o 1. Na definição 2, os números são considerados positivos maiores que 1, como um aglomerado de unidades. Desta forma temos que, a *unidade*, por Euclides, é aquilo que possibilita a medida, não sendo um número, sendo inconcebível que a unidade possa ser subdividida. Desta forma, temos a unidade, 1, sendo tratada de forma à parte do restante dos números.



No diagrama anterior, tomamos o *A* como unidade, então *BE* representa o número 3.

Da definição 3, temos as possíveis relações numéricas aos pares, onde, futuramente será utilizado o termo *razão*.

No diagrama anterior, tomando *u* como unidade, então o 2 é representado por *AB*, enquanto 6 é representado por *CF*. Podemos notar que *AB* mede *CF* três vezes, em *CD*, em *DE* e em *EF*, e desta forma, 2 é uma parte de 6. O 2 é nomeadamente, uma terça parte de 6, três vezes.

As técnicas de medida dominantes nas práticas eram realizadas pelo método da *antifairese*, que hoje é conhecido como “algoritmo de Euclides”. Este método era utilizado para encontrar a medida comum de dois números, ou seja, o máximo divisor comum (m.d.c.) entre eles.

Proposição VII.1: Dois números desiguais estando dados, o menor sendo, a cada vez, continuamente retirado do maior, se o números que resta nunca mede o que o precede até que se chegue à unidade, então dizemos que os números de origem são primos entre si.

Proposição VII.2: Encontrar a maior medida comum entre dois números que não são primos entre si.

Dado dois segmentos, *A* e *B*, onde queremos encontrar a maior medida comum, sendo *A* a maior medida e *B* não mede *A*. Devemos retirar continuamente a menor medida da maior, ou seja, tirar *B* de *A*, até obter um resto R_1. Em seguida devemos retirar R_1 de *B*, até obter o resto R_2. Em seguida devemos retirar R_2 de R_1, até obter o resto R_3. E assim sucessivamente. Podemos reescrever isso, com equivalência, da seguinte forma:

$$A=n_0.B+R_1$$

$$B=n_1.R_1+R_2$$

$$R_1=n_2.R_2+R_3$$

$$...$$

Tal procedimento pode dar zero e chagar ao fim ou não (que não é tratado neste livro VII). Se os dois valores iniciais, no caso *A* e *B*, não forem primos entre si, o resto anterior ao zero, será diferente da unidade, sendo esta a maior medida em comum. Caso forem primos, o resto anterior ao zero, será a unidade.

Para exemplificar, usaremos o m.d.c. de 119 e 85.

$$119 = 1 \, . \, 85 + 34$$

$$85 = 2 \, . \, 34 + 17$$

$$34 = 2 \, . \, 17 + 0$$

Portanto a maior medida comum entre 119 e 85 é 17. Com isso, temos que 119 e 85 não são primos entre si.

Um outro exemplo, usaremos o m.d.c. de 120 e 83.

$$120 = 1 \, . \, 83 + 37$$

$$83 = 2 \, . \, 37 + 9$$

$$37 = 4 \, . \, 9 + 1$$

$$9 = 9. \, 1 + 0$$

Portanto a maior medida comum entre 120 e 83 é 1. Com isso, temos que 120 e 83 são primos entre si.

Os casos onde o algoritmo não termina, são tratados na proposição X.2 dos *Elementos* de Euclides.

Proposição X.2: Se, quando a menor de duas grandezas é continuamente subtraída da maior, a que resta nunca mede a precedente, as grandezas são incomensuráveis.

O procedimento geométrico da antifairese que foi usado nesta demonstração, é exatamente a mesma demonstração geométrica da incomensurabilidade entre a diagonal e o lado de um quadrado.

O livro VIII trata dos números em *proporção continuada*, ou seja, em uma linguagem atual, números em *progressão geométrica*.

Em *Elementos*, também temos o conceito da infinidade dos números primos, na *proposição IX.20*. Ele supõe que há um na quantidade finita de números primos ($p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$) e constrói o número n, onde:

$$n = p_1 \,.\, p_2 \,.\, p_3 \,.\, \ldots \,.\, p_k + 1$$

sendo n um número primo, diferente de todos os outro, gerando uma contradição.

No livros IX, também mostra a construção de números perfeitos (formados pela soma de seus divisores próprios). Na *proposição IX.36*, Euclides mostra que se

$$p = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n$$

for primo, então, $p.2^n$ é um número perfeito.

Livro XII – Áreas e volumes. O método de exaustão de Eudoxo

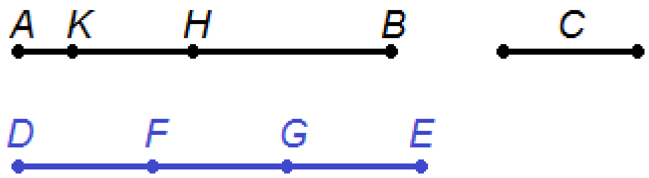
Na *proposição XII.2* é utilizado o método da exaustão de Eudoxo, porém, se faz necessário o conhecimento prévio da *proposição X.1*, conhecida como *Lema de Euclides*. O lema diz que: *de duas magnitudes desiguais sendo estabelecidas, se da maior for subtraída uma magnitude maior que sua metade, e daquela que for deixada uma magnitude maior que sua metade for subtraída, e se este processo for repetido continuamente, então sobrará alguma magnitude menor do que a menor magnitude estabelecida*.

Sejam *AB* e *C* duas magnitudes desiguais, das quais *AB* é a maior.

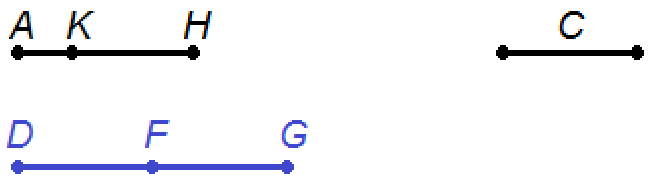
Se de *AB* for subtraída uma magnitude maior que sua metade, e daquilo que resta uma magnitude maior que sua metade for retirada, e se este processo se repetir continuamente, então sobrará alguma magnitude que é menor que a magnitude *C*.

Por construção, *DE* é múltiplos *de C* e maior que *AB*. Divide *DE* nas partes *DF*, *FG*, e *GE*, iguais a *C*.

De *AB* subtraia *BH* maior que sua metade, e de *AH* subtraia *HK* maior que sua metade, e repita este processo continuamente até que as divisões em *AB* sejam iguais às divisões em *DE*.



Sejam então, *AK*, *KH* e *HB* divisões iguais em quantidade a *DF*, *FG* e *GE*. Como *DE* é maior que *AB*, e de *DE* se subtraí *EG* (menor que sua metade) e, de *AB* se subtraí *BH* (maior que sua metade), portanto, o restante *GD* é maior que o restante *HA*.



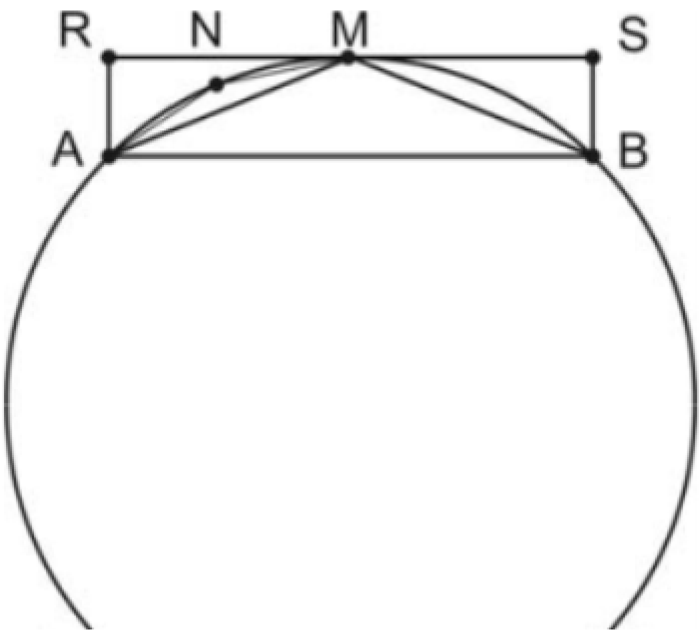
Subtraindo de *GD* a metade *GF*, e de *HA*, *HK* que é maior que sua metade, portanto, o restante *DF* é maior que o restante *AK*.

Mas *DF* é igual a *C*, portanto *C* também é maior que *AK*. Portanto *AK* é inferior a *C*.

Usando tal resultado, temos que a diferença entre a área do círculo e a área do polígono nela contida, pode ser tornada menor do que qualquer quantidade dada, como podemos ver a seguir.

Seja *AB* o lado de um polígono regular de *n* lados inscrito em uma circunferência e *M* o ponto médio do arco *AB*. Seja *RS* tangente à circunferência, passando por *M*. Temos que *AM = BM*, e que esses são dois dos lados de um polígono regular de *2n* lados inscrito na circunferência.

Desta forma temos que área do triângulo *AMB* é metade da área do retângulo *ARSB*, logo o triângulo *AMB* é maior do que a metade da área do segmento circular *AMB*. Subtraindo do segmento circular *AMB* o triângulo *AMB*, retiramos uma figura com área maior do que a metade da área do segmento circular.



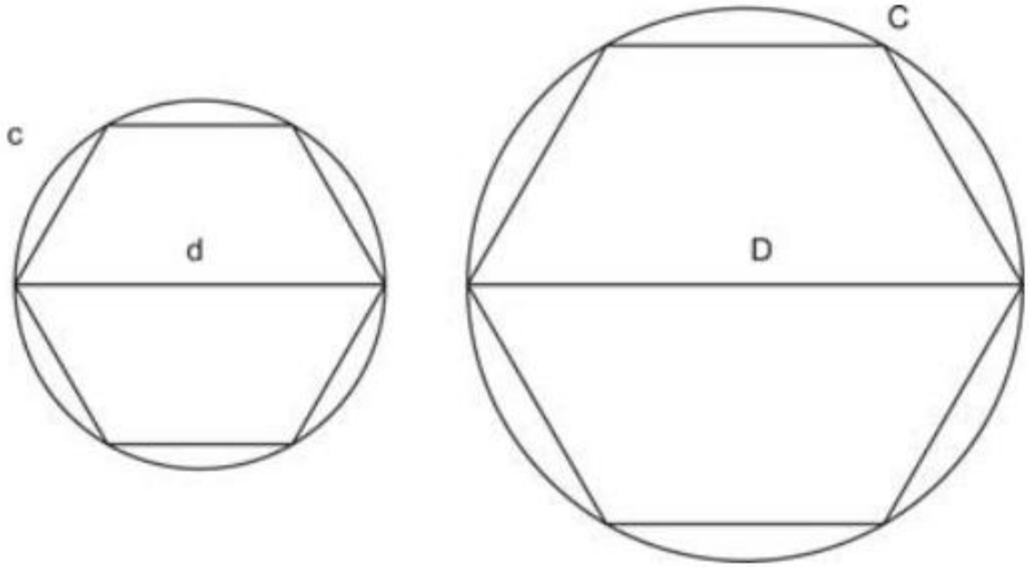
Repetindo o mesmo procedimento, por exemplo, para um triângulo *ANM*, formado por dois lados de um polígono inscrito com o *4n* lados, podemos sempre retirar da área que resta uma área maior do que a metade da área do segmento circular original.

Proposição XII.2: Círculos estão entre si como os quadrados de seus diâmetros.

A demonstração de proposição XII.2 será utilizando símbolos algébricos atuais, de vido a demonstração de Euclides ser longa e complexa.

Tomando respectivamente *a* e *A* como áreas, e *d* e *D* como diâmetros dos círculos c e C, vamos querer mostrar que

$$\frac{a}{A} = \frac{d^2}{D^2}$$



Para isso, vamos supor que $\frac{a}{A} > \frac{d^2}{D^2}$ e que existe um polígono regular inscrito em *c*, cujo área é *p*, tal que $\frac{p}{A} > \frac{d^2}{D^2}$, pois, a partir do resultado anteriormente, *a-p* pode ser menor que qualquer quantidade dada. Sendo *P* a área do polígono inscrito na circunferência *C* semelhante a *p*, sabemos que $\frac{p}{P} = \frac{d^2}{D^2}$ pela propriedade de polígonos inscritos. Desta forma, temos que $\frac{p}{A} > \frac{d^2}{D^2} = \frac{p}{P}$ nos fazendo a chegar em *P*>*A*. Isso nos leva a uma contradição, pois, como *P* é um polígono inscrito em *C*, e a área de *C* é igual a *A*, então *P* não pode ser maior que *A*.

De maneira análoga, mostramos que $\frac{a}{A} < \frac{d^2}{D^2}$ também nos leva a uma contradição.

Vamos supor que $\frac{a}{A} < \frac{d^2}{D^2}$ e que existe um polígono regular inscrito em *C*, cujo área é *P*, tal que $\frac{a}{P} < \frac{d^2}{D^2}$, pois, a partir do resultado anteriormente, *A*-*P* pode ser menor que qualquer quantidade dada. Sendo *p* a área do polígono inscrito na circunferência *c* semelhante a *P*, sabemos que $\frac{p}{P} = \frac{d^2}{D^2}$ pela propriedade de polígonos inscritos. Desta forma, temos que $\frac{a}{P} < \frac{d^2}{D^2} = \frac{p}{P}$ nos fazendo a chegar em $a<p$. Isso nos leva a uma contradição, pois, como *p* é um polígono inscrito em *c*, e a área de *c* é igual a *a*, então *p* não pode ser maior que *a*.

Com isso mostramos que $\frac{a}{A} = \frac{d^2}{D^2}$.

A transmissão dos Elementos e as edições em língua portuguesa

Elementos de Euclides formam um dos mais influentes trabalhos da ciência na história da Humanidade.

Elementos são, a seguir à Bíblia, um dos livros mais reproduzidos e estudados na história do mundo ocidental, sendo praticamente o único livro de texto usado no ensino da Matemática durante mais de dois milénios.

Nele há uma compilação de resultados diversos, já conhecidos há muito tempo, que foram estudados por muitos.

Em meados do século XX, uma das palavras de ordem do *Movimento da Matemática Moderna*, foi <u>*Abaixo Euclides!*</u>.

Nos doze livros não se encontram aplicações, exercícios ou motivações, sendo apenas uma exposição seca, direta, implacável. Mesmo assim, eles foram usados até recentemente no ensino de jovens em alguns países, como a Inglaterra, contribuindo para que algumas pessoas passassem a considerar a Matemática como um saber árido.

Mesmo tendo muitas edições, não a vestígio de manuscritos da época de Euclides. Sendo assim, não sabemos o que de fato foi escrito por Euclides e os acréscimos, modificações ou mutilações que a obra possa ter sofrido.

Durante a Idade Média, se acrescentou outros dois livros a obra, assim como o acréscimo de algumas proposições, na tentativa de deixá-lo mais fácil, ou supressão de outras parte, consideradas sem aplicações ou por serem difíceis.

No século IV d.C., Theon de Alexandria publicou uma edição dos *Elementos* que deu origem a toda uma longa série de edições posteriores chamadas *manuscritos theoninos*.

Entre 763 e 809 d.C, foi encomendada uma tradução pelo árabe Harun Al-Rashid.

Em torno de 1120 d.C, Adelard de Bath o traduziu para o grego, a partir do manuscrito árabe.

Em 1482 foi feita a primeira edição latina impressa, por Erhard Ratdolt, em Veneza.

Também de Veneza veio a primeira edição grega impressa, por Bartolomeo Zamberti, em 1505.

Um marco importante na história da transmissão dos *Elementos*, foi a edição de Peyrard, em grego, latim e francês, publicada entre 1814 e 1818. Peyrard teve acesso a manuscritos da biblioteca do Vaticano, e os utilizou para preparar esta nova edição.

Entre 1883 e 1916, foi publicado pelo dinamarquês Johan Ludvig Heiberg conjuntamente com Heinrich Menge, a edição dos *Elementos*, que deu origem a praticamente todas as edições modernas de Euclides. Ela se difundiu facilmente devido à tradução para o inglês. Heiberg comparou manuscritos da linhagem theoninos com os que Peyrard, e propôs uma reconstituição do texto euclidiano considerada definitiva durante o século XX.

Somente em 1735 que surgiu a primeira edição em português. O Padre Jesuíta Manoel de Campos, publicou, em Lisboa, seu *Elementos de geometria plana e sólida, segundo a ordem de Euclides*. Tal edição foi inspirada em outro jesuíta, André Tacquet, que publicou, em 1725, sua edição dos *Elementos*.

Por fim, em 2009, a língua portuguesa ganhou sua primeira edição completa dos *Elementos* de Euclides, quando Irineu Bicudo os traduziu diretamente do grego.

Referências Bibliográficas

ROQUE, Tatiana; PITOMBEIRA, João Bosco. ***Tópicos de história da matemática***.

ARAÚJO, Helena; GARAPA, Marco; LUÍS, Rafael. ***Elementos de Euclides Livros VII e IX***. Universidade da Madeira. Funchal, 2005.

JOYCE, David E. ***Euclid's Elements***. Clark University, Department of Mathematics and Computer Science. Worcester (Massachusetts). Disponível em: <mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html>.