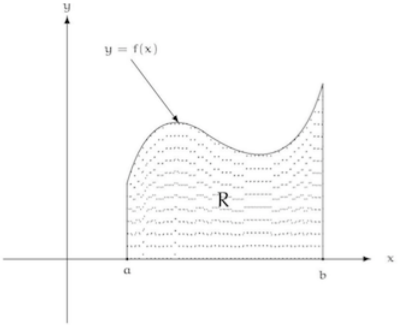
Integral definida

O conteúdo será desenvolvido ao longo de uma série de arquivos enumerados contendo slides, onde serão tratados diversos tópicos para definir e dar propriedades da Integral Definida de uma função $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$.

A motivação clássica para a introdução do conceito da Integral Definida, será tratar do problema de encontrar área, que indicaremos por $\underline{\mathcal{A}}$, de uma região limitada, que denotaremos de $\underline{R}$, contida no plano xOy, que é delimitada pela representação geométrica do gráfico de uma função $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$, pelas retas $x = a$, $x = b$ e pelo eixo Ox.
A figura abaixo ilustra a situação descrita acima:



Para tanto precisaremos relembrar o seguinte conceito:

Somatório - $\sum$

Para ilustrar temos o:

Exemplo

1. $$\sum_{i=1}^{4} i = 1 + 2 + 3 + 4 \,.$$
2. *Dados* $n \in \mathbb{N}$ *e a função* $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, *para* $m \in \{1\,, 2\,, \cdots\,, n\}$, *teremos*
$$\sum_{i=m}^{n} F(i) = F(m) + F(m+1) + \cdots + F(n) \,.$$
3. *Dados* $n \in \mathbb{N}$, *a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $x_1\,, x_2\,, \cdots\,, x_n\,, \Delta x \in \mathbb{R}$, *então*
$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x \,.$$

Propriedades do somatório

Temos a:

Proposição

Sejam $n \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}$ *e* $F, G : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *duas funções. Então:*

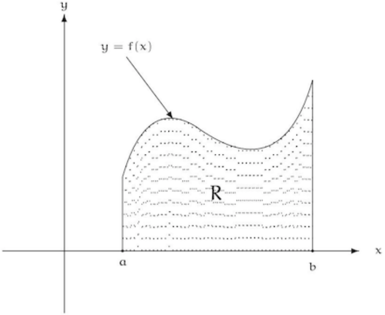
1. $$\sum_{i=1}^{n} c = n\,c$$
2. $$\sum_{i=1}^{n} [c\,F(i)] = c \sum_{i=1}^{n} F(i)$$
3. $$\sum_{i=1}^{n} [F(i) + G(i)] = \sum_{i=1}^{n} F(i) + \sum_{i=1}^{n} G(i)$$
4. $$\sum_{i=1}^{n} [F(i) - F(i-1)] = F(n) - F(0)$$

Área de uma região plana "especial"

Seja $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ função contínua, satisfazendo:

$$f(x) \geq 0\,, \quad \text{para} \quad x \in [a\,,b]\,.$$

Objetivo: encontrar o valor da área, que indicada $\underline{\mathcal{A}}$, da região limitada, que denotada por $\underline{R}$, contida no plano xOy, delimitada pela representações geométricas dos gráficos da função $\underline{f}$, das retas $x = a$, $x = b$ e do eixo dos Ox (figura abaixo):



Ideia:

Encontraremos "aproximações" para a região $\mathcal{R}$, por um número finito de regiões, que saibamos encontrar o valor das mesmas.
Tais regiões que nos ajudarão a obter "aproximações" para o número real $\mathcal{A}$ (valor da área da região $\mathcal{R}$), serão **retângulos**.
Passemos a construção das "aproximações":

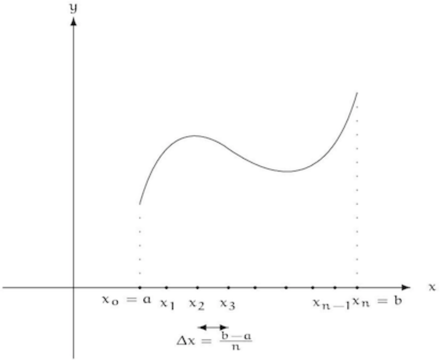
Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, dividimos o intervalo $[a\,,b]$ em $\underline{n}$ partes iguais, obtendo-se desta forma $n+1$ pontos, que denotados por:

$$x_i\,, \quad \text{para} \quad i \in \{0\,,1\,,\cdots\,,n\}\,,$$

de modo que: $\quad x_o \doteq a\,,$

$$x_i \doteq x_o + i\,\Delta x\,, \quad \text{para} \quad i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}\,,$$

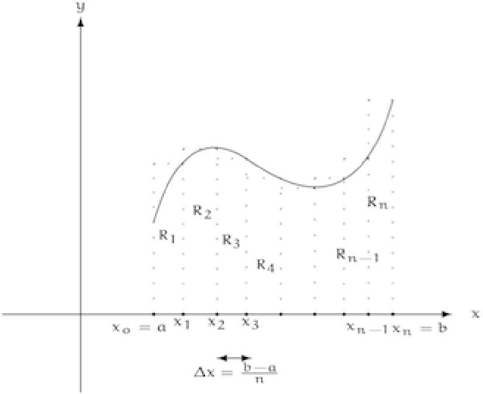
onde $\quad \Delta x \doteq \dfrac{b-a}{n}\,. \qquad$ (figura abaixo)



Consideremos a soma:

$$S_n \doteq \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \cdots + \mathcal{A}_n\,, \qquad (1)$$

onde, para cada $i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$, $\underline{\mathcal{A}_i}$, denota a área do retângulo, indicado por $\underline{R_i}$, que tem o como base o intervalo $[x_{i-1}\,,x_i]$ e altura dada por $f(x_i)$ (figura abaixo).



Notemos que, e geral, para todo $n \in \mathbb{N}$, o número real S_n **NÃO** será igual ao número real $\mathcal{A}$ (valor da área da região $\mathcal{R}$).
Porém, aumentando-se o valor de $\underline{n}$ (isto é, o número de divisões do intervalo $[a\,,b]$), teremos que o valor do número real $\underline{S_n}$ ficará cada vez mais próximo do valor da área $\underline{\mathcal{A}}$, ou ainda:

$$\mathcal{A} = \lim_{n \to \infty} S_n \overset{(1)}{=} \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

caso o limite acima exista.

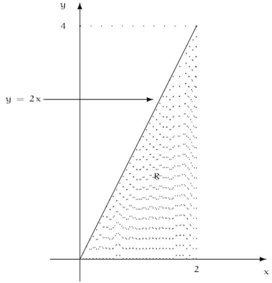
Apliquemos este processo ao:

Exemplo

Seja $f : [0\,,2] \to \mathbb{R}$ *função, dada por*

$$f(x) \doteq 2\,x\,, \quad para \quad x \in [0\,,2]\,. \tag{2}$$

Calcular a área $\underline{A}$*, da região limitada* $\underline{R}$*, contida no plano* xOy*, delimitada pelas representações geométricas dos gráficos da função* $\underline{f}$*, das retas* $x = 0$*,* $x = 2$ *e do eixo* Ox *(figura abaixo).*



Resolução:

1.o modo:

Observemos que a região é um triângulo retângulo que tem como base o intervalo $[0\,,2]$ e altura

$$f(2) \overset{(2)}{=} 4\,.$$

Assim sua área será dada por:

$$\mathcal{A} = \frac{\text{base x altura}}{2} = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4\ u.a.\,,$$

onde $u.a.$ denota unidades de área.

2.o modo:

Utilizando-se o processo desenvolvido anteriormente, ou seja, dividindo-se o intervalo $[0\,,2]$, em $\underline{n}$ intervalos de mesmo comprimento teremos, (neste caso temos $a \doteq 0$ e $b \doteq 2$) para cada $i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$, temos que:

$$\mathcal{A}_i \doteq f(x_i)\,\Delta x \underset{\left\{\begin{array}{l} \Delta x \doteq \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n} \\ x_i \doteq a + i\,\Delta x = i\,\frac{2}{n} \end{array}\right\}}{=} \underbrace{f\left(i\,\frac{2}{n}\right)}_{\overset{(2)}{=} 2\,i\,\frac{2}{n}} \frac{2}{n} = \frac{8}{n^2}\,i\,, \qquad (3)$$

$$\text{logo} \quad \mathcal{S}_n \doteq \sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i \overset{(3)}{=} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{8}{n^2}\,i\right) = \frac{8}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i\,. \qquad (4)$$

Sabemos que soma dos $\underline{n}$ primeiros termos de uma P.A, de razão igual a $\underline{1}$, é dada por

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\,(n+1)}{2}\,. \tag{5}$$

$$\text{Logo:} \quad S_n \overset{(4)\text{ e }(5)}{=} \frac{8}{n^2}\,\frac{n\,(n+1)}{2} = 4 + \frac{4}{n}\,. \tag{6}$$

$$\text{e assim} \quad \mathcal{A} = \lim_{n\to\infty} S_n \overset{(6)}{=} \lim_{n\to\infty}\left(4 + \frac{4}{n}\right) \overset{\text{Exercício}}{=} 4\,, \tag{7}$$

como obtido no 1.o passo.

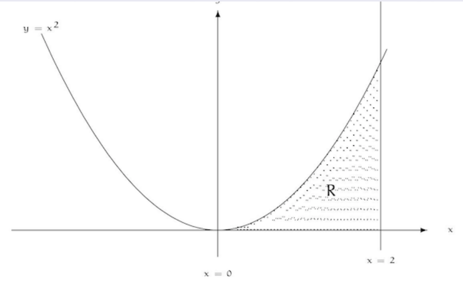
$\square$

Exemplo

Seja $f : [0\,,2] \to \mathbb{R}$ *função, dada por*

$$f(x) \doteq x^2\,, \quad para \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{8}$$

Encontrar a área $\underline{A}$, *da região limitada* $\underline{R}$, *contida no plano* xOy, *delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função* $\underline{f}$, *das retas* $x = 0$, $x = 2$ *e do eixo* Ox *(figura abaixo).*



Resolução: Faremos o processo desenvolvido anteriormente, passo a passo:

1.o passo: considerando-se o retângulo que tem como base o intervalo

$$[0\,,2]$$

e altura o intervalo vertical

$$[0\,, f(2)] \overset{(8)}{=} [0\,,4]\,,$$

que será indicado por $\underline{R_1}$ (veja a figura abaixo).

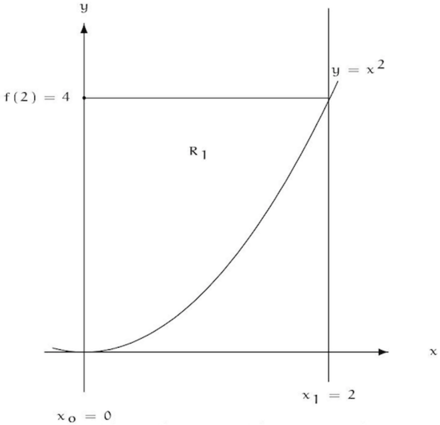
$$\mathcal{A}_1 = \text{base x altura} = 2 \cdot 4$$

ou seja, este número real é o valor da região $\underline{R_1}$.

Neste caso dividimos o intervalo $[0\,,2]$ em $n \doteq 1$ partes (isto é, $x_o \doteq 0$ e $x_1 \doteq 2$).
Logo o valor

$$\mathcal{A}_1 = 8$$

seria uma primeira aproximação para o valor da área $\underline{\mathcal{A}}$, da região $\underline{R}$ (figura abaixo).

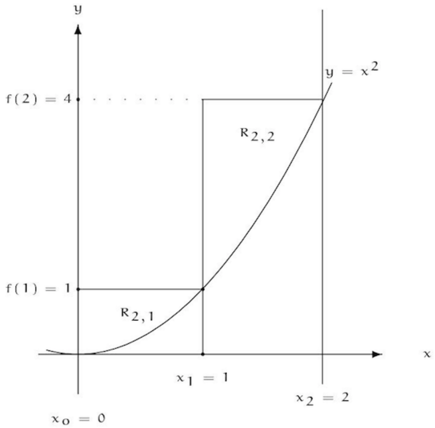


2.o passo: considerando-se os retângulos que têm como bases

os intervalos: $[0\,,1]$ e $[1\,,2]$ e alturas

os intervalos verticais: $[0\,,f(1)] \overset{(8)}{=} [0\,,1]$ e $[0\,,f(2)] \overset{(8)}{=} [0\,,4]$,

indicados por $R_{2,1}$ e $R_{2,2}$, respectivamente (figura abaixo).



As áreas dos retângulos $R_{2,1}$ e $R_{2,2}$, que indicaremos por $\mathcal{A}_{2,1}$ e $\mathcal{A}_{2,2}$, respectivamente, serão dadas por:

$$\mathcal{A}_{2,1} = \text{base x altura de } R_{21} = 1 \cdot f(1) \overset{(8)}{=} 1 \cdot 1 = 1\,, \tag{9}$$

$$\mathcal{A}_{2,2} = \text{base x altura de } R_{22} = 1 \cdot f(2) \overset{(8)}{=} 1 \cdot 4 = 4\,. \tag{10}$$

Logo a soma das áreas dos retângulos $R_{2,1}$ e $R_{2,2}$, que indicaremos por $\mathcal{A}_2$, será dada por:

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_{2,1} + \mathcal{A}_{2,2} \overset{(9),(10)}{=} 1 + 4\,.$$

Neste caso dividimos o intervalo $[0\,,2]$ em duas partes iguais, isto é,

$$x_o \doteq 0\,, \quad x_1 \doteq 1 \quad \text{e} \quad x_2 = 2\,,$$

e assim o valor $\quad \mathcal{A}_2 = 5$

é uma segunda aproximação, para o valor da área da região R.

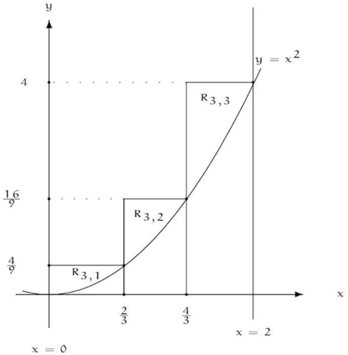
3.o passo: considerando-se os retângulos que têm como bases

os intervalos: $\left[0\,,\frac{2}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}\,,\frac{4}{3}\right]$ e $\left[\frac{4}{3}\,,2\right]$

e alturas os intervalos verticais:

$$\left[0\,,f\left(\frac{2}{3}\right)\right] \overset{(8)}{=} \left[0\,,\frac{4}{9}\right], \left[0\,,f\left(\frac{4}{3}\right)\right] \overset{(8)}{=} \left[0\,,\frac{16}{9}\right] \text{ e } [0\,,f(2)] \overset{(8)}{=} [0\,,4]\,,$$

indicados por $R_{3,1}$, $R_{3.2}$ e $R_{3.3}$, respectivamente (figura abaixo).



As áreas dos retângulos $R_{3,1}$, $R_{3,2}$ e $R_{3,3}$, que indicaremos por $\mathcal{A}_{2,1}$, $\mathcal{A}_{3,2}$ e $\mathcal{A}_{3,3}$, respectivamente, serão dadas por:

$$\mathcal{A}_{3,1} = \text{base x altura de } R_{31} = \frac{2}{3} \cdot f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{27},$$

$$\mathcal{A}_{3,2} = \text{base x altura de } R_{32} = \frac{2}{3} \cdot f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{16}{9} = \frac{32}{27},$$

$$\mathcal{A}_{3,3} = \text{base x altura de } R_{33} = \frac{2}{3} \cdot f(2) = \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{8}{3}.$$

A soma das áreas dos retângulos acima, indicada por $\mathcal{A}_3$, será dada por:

$$\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_{3,1} + \mathcal{A}_{3,2} + \mathcal{A}_{3,3} = \frac{8}{27} + \frac{32}{27} + \frac{8}{3} = \frac{112}{27}.$$

Dividimos o intervalo $[0\,,2]$ em três intervalos de comprimentos

iguais, isto é, $x_o \doteq 0\,, \quad x_1 \doteq \frac{2}{3}\,, \quad x_2 \doteq \frac{4}{3}$ e $x_3 \doteq 4\,,$

e assim o valor $\mathcal{A}_3 = \dfrac{112}{27}\,,$

será uma terceira aproximação para o valor da região R.

Podemos prosseguir dividindo o intervalo $[0\,,2]$ em 4, 5, etc. intervalos de mesmo comprimentos ou, mais geralmente, dividindo-se o intervalo $[0\,,2]$ em $\underline{n}$ intervalos de mesmo comprimentos, obtendo os pontos

$$x_o \doteq 0\,,\ x_1 \doteq \Delta x\,,\ \cdots\,,\ x_j \doteq j\cdot\Delta x\,,\ \cdots\,,\ x_n \doteq 2\,,$$

onde $\Delta x \doteq \dfrac{2-0}{n} = \dfrac{2}{n}$,

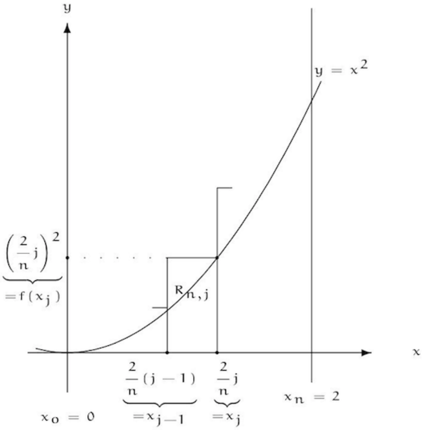
e fazendo uma construção semelhante a que fizemos acima, por meio de retângulos, que indicaremos por $R_{n,j}$.
Para cada $j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$, o retângulo $R_{n,j}$ terá como

$$\text{base o intervalo } [x_{j-1}\,,x_j] = \left[\frac{2}{n}(j-1)\,,\ \frac{2}{n}\,j\right]$$

e altura o intervalo vertical

$$[x_j\,,f(x_j)] = \left[x_j\,,\ \left(\frac{2}{n}\,j\right)^2\right] \overset{(8)}{=} \left[x_j\,,\ \frac{4}{n^2}\,j^2\right].$$

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima:



cuja área, indicada por $\mathcal{A}_{n,j}$, será dada por:

$$\mathcal{A}_{n,j} = \text{base} \times \text{altura de } R_{n,j} = \frac{2}{n} f\left(\frac{2}{n} j\right) \overset{(8)}{=} \frac{2}{n} \left(\frac{2}{n} j\right)^2 = \frac{8}{n^3} j^2 .$$

A soma das áreas dos retângulos $R_{n,j}$, indicada por $\mathcal{S}_n$, será:

$$\mathcal{S}_n = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{A}_{n,j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{8}{n^3} j^2 = \frac{8}{n^3} \sum_{j=1}^{n} j^2 . \tag{11}$$

Utilizando-se indução finita, podemos mostrar que

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6} . \tag{12}$$

Logo: $\mathcal{S}_n \overset{(11) \text{ e } (12)}{=} \frac{8}{n^3} \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6} = \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3\,n^2}$, (13)

para cada $n \in \mathbb{N}$, que será a n-ésima aproximação para o valor da área da região R.

$$\text{Assim } \mathcal{A} = \lim_{n\to\infty} S_n \overset{(13)}{=} \lim_{n\to\infty} \left[\frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3\,n^2}\right] \overset{\text{Exercício}}{=} \frac{8}{3} ,$$

ou seja, a área da região R será igual a $\mathcal{A} = \frac{8}{3}$ $u.a.$. □

Observação

O processo descrito acima nos fornece um modo de calcular a área de regiões planas do tipo descrito acima, porém o processo é complicado e trabalhoso.
O que faremos a seguir é tentar colocá-lo em uma forma mais simples de obtê-la.