Limite de funções a valores reais, de várias variáveis reais

A definição de limites que será introduzida a seguir, é semelhante ao caso de funções de uma variável real a valores reais, mas com conseqüências diferentes desta última.

Definição

Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *um subconjunto não vazio,* $f : A \to \mathbb{R}$ *uma função,* $\vec{x}_o$ *um ponto de acumulação do conjunto* $\underline{A}$*, em* $\underline{\mathbb{R}^n}$*.*
Diremos que **limite de $f(\vec{x})$ quando $\vec{x}$ tende para $\vec{x}_o$** *é* $L \in \mathbb{R}$*, denotando por*

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_o} f(\vec{x}) \doteq L$$

se, dado $\varepsilon > 0$*, podemos encontrar:* $\delta = \delta\,(\vec{x}_o\,,\varepsilon) > 0\,,$
de modo que, se $\vec{x} \in A$*, satisfaz,* $0 < \|\vec{x} - \vec{x}_o\| < \delta\,,$
implicar que $|f(\vec{x}) - L| < \varepsilon\,.$

Observação

- *A norma $\|\cdot\|$ acima à esquerda é a norma usual do $\underline{\mathbb{R}^n}$ e $|\cdot|$ é o módulo na reta $\underline{\mathbb{R}}$ (ou seja, a norma usual em $\underline{\mathbb{R}}$).*
- *Como no caso de funções, de uma variável real, a valores reais (visto no Cálculo I), para estudarmos o limite de uma função, de várias variáveis reais, a valores reais em um ponto, a função* **<u>não</u>** *precisa,* **<u>necessariamente</u>***, estar definida nesse ponto.*
- *Da Definição acima, temos que*

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_o} f(\vec{x}) = L \quad \textit{se, e somente se,}$$

dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta = \delta(\vec{x}_o\,, \varepsilon) > 0$, tal que que $f\left(\mathcal{B}_\delta(\vec{x}_o) \cap A\backslash\{\vec{x}_o\}\right) \subseteq \mathcal{B}_\varepsilon(L) = (L-\varepsilon\,, L+\varepsilon)\,.$

Observação

Ainda da Definição acima: $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_o} f(\vec{x}) = L$ *se, e somente se,*

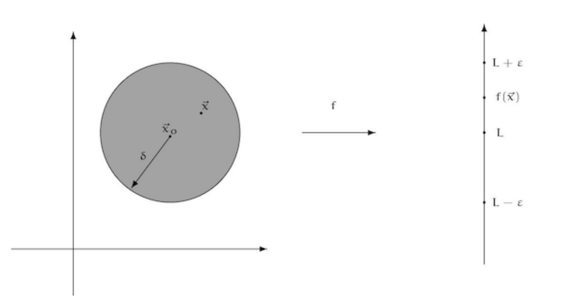
dada uma bola aberta $\mathcal{B}_\varepsilon(L) = (L-\varepsilon\,, L+\varepsilon) \subseteq \mathbb{R}$,

podemos encontrar uma bola aberta $\mathcal{B}_\delta(\vec{x}_o) \subseteq \mathbb{R}^n$,

de centro em $\underline{\vec{x}_o}$, *tal que, se* $\vec{x} \in (\mathcal{B}_\delta(\vec{x}_o) \cap A) \setminus \{\vec{x}_o\}$,

deveremos ter $f(\vec{x}) \in \mathcal{B}_\varepsilon(L) = (L-\varepsilon\,, L+\varepsilon)$,

Para $n \doteq 2$, *geometricamente, corresponde a figura abaixo:*



Exemplo

Para $(x_o\,,y_o) \in \mathbb{R}^2$ *e* $k \in \mathbb{R}$ *fixados, mostre que*

$$\lim_{(x\,,y)\to(x_o\,,y_o)} f(x\,,y) = f(x_o\,,y_o)$$

onde

1. *Seja* $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *a função dada por*

$$f(x\,,y) \doteq k\,, \quad para \quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,, \tag{1}$$

2. *Seja* $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *a função dada por*

$$f(x\,,y) \doteq x\,, \quad para \quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,. \tag{2}$$

Resolução:

Para (1) :

Se $L \doteq k \overset{(1)}{=} f(x_o\,,y_o)$,

dado $\varepsilon > 0$, consideremos $\delta \doteq \varepsilon > 0$.

Logo, se $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, satisfaz $0 < \|(x\,,y) - (x_o\,,y_o)\| < \delta$,

teremos:

$|f(x\,,y) - k| \overset{(1)}{=} |k - k| = 0 < \varepsilon$.

Logo, da Definição de limites, segue que

$$\lim_{(x\,,y)\to(x_o\,,y_o)} f(x\,,y) = k \overset{(1)}{=} f(x_o\,,y_o)\,.$$

Para (2) **:**

Notemos que

$$\|(x\,,y)-(x_o\,,y_o)\| \doteq \sqrt{(x-x_o)^2-(y-y_o)^2} \geq |x-x_o|\,. \qquad (3)$$

Se $L \doteq x_o \overset{(2)}{=} f(x_o\,,y_o)$,

dado $\varepsilon > 0$, consideremos $\delta \doteq \varepsilon > 0\,.$ (4)

Logo, se $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, satisfaz $0 < \|(x\,,y)-(x_o\,,y_o)\| < \delta\,,$ (5)

teremos:

$$|f(x\,,y)-x_o| \overset{(2)}{=} |x-x_o| \overset{(3)}{\leq} \sqrt{(x-x_o)^2-(y-y_o)^2} \overset{(4)}{<} \delta \overset{(5)}{=} \varepsilon\,.$$

Logo, da Definição de limites, segue que

$$\lim_{(x\,,y)\to(x_o\,,y_o)} f(x\,,y) = x_o \overset{(2)}{=} f(x_o\,,y_o)\,.$$

$\square$

Temos também o:

Exercício

Mostre que $\lim_{(x\,,y)\to(x_o\,,y_o)} y = y_o\,.$

Teorema

Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *um subconjunto não vazio,* $f : A \to \mathbb{R}$ *uma função,* $\underline{\vec{x}_o}$ *um ponto de acumulação do conjunto* $\underline{A}$*, em* $\underline{\mathbb{R}^n}$*. Suponhamos que exista*

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_o} f(\vec{x}) = L\,.$$

Sejam $\underline{I}$*, intervalo aberto de* $\underline{\mathbb{R}}$ *contendo* t_o *e* $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ *uma curva parametrizada, de modo que*

$$\gamma(t_o) = \vec{x}_o\,, \quad \gamma(t) \neq \vec{x}_o \quad e \quad \gamma(t) \in A\,, \quad para \quad t \in I \setminus \{t_o\}\,.$$

Então teremos: $\lim_{t\to t_o} f\,[\gamma(t)] = L\,.$

Observação

Notemos que se

$$\gamma_1 \, , \gamma_2 : I \to \mathbb{R}^n$$

são duas curvas parametrizadas, satisfazendo as condições do Teorema acima e tais que

$$\lim_{t \to t_o} \gamma_1(t) = \lim_{t \to t_o} \gamma_2(t) = \vec{x_o} \, ,$$

$$\lim_{t \to t_o} f[\gamma_1(t)] = L_1 \, , \quad \lim_{t \to t_o} f[\gamma_2(t)] = L_2 \, ,$$

com $\quad L_1 \neq L_2 \, ,$

então, do Teorema acima, podemos concluir que **NÃO** *existirá o limite*

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} f\left(\vec{x}\right) \, ,$$

ou seja, pode ser uma forma de mostrar a **NÃO** *existência de um limite.*

Exemplo

Calcule o valor dos limites abaixo, caso existam, justificando as respostas:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^4} \tag{6}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^3+y^4}\,; \tag{7}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y^2}{x^2+y^4}\,. \tag{8}$$

Resolução:

De (7) : Seja $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0\,,0)\} \to \mathbb{R}$, a função dada por

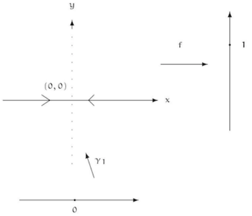
$$f(x\,,y) \doteq \frac{x^2}{x^2+y^4}\,, \quad \text{para} \quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0\,,0)\}\,. \tag{9}$$

Considerando-se a curva parametrizada $\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, dada por

$$\gamma_1(t) \doteq (t\,,0)\,, \quad \text{para} \quad t \in \mathbb{R}\,, \tag{10}$$

teremos (figura abaixo): $\gamma_1(\overbrace{\ 0\ }^{=t_o}) \overset{(10)}{=} \overbrace{(0\,,0)}^{=\vec{x}_o}$ e

$$\lim_{t\to 0} f[\gamma_1(t)] \overset{(10)}{=} \lim_{t\to 0} f[(t\,,0)] \overset{(9),\ \text{com}\ t\neq 0}{=} \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t^2+0^4} = 1\,. \tag{11}$$

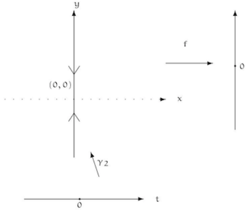


Considerando-se a curva parametrizada $\gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\gamma_2(t) \doteq (0\,, t)\,, \quad \text{para} \quad t \in \mathbb{R}\,, \tag{12}$$

teremos (figura abaixo): $\gamma_2(\overbrace{\;0\;}^{=t_o}) \overset{(12)}{=} \overbrace{(0\,,0)}^{=\vec{x}_o}$ e

$$\lim_{t\to 0} f\,[\gamma_2(t)] \overset{(12)}{=} \lim_{t\to 0} f[(0\,,t)] \overset{(9)\ \text{com}\ t\neq 0}{=} \lim_{t\to 0} \frac{0^2}{0^2+t^4} = 0\,. \tag{13}$$



Logo, de (11), (13) e do Teorema acima, segue que não existe o limite $\displaystyle\lim_{(x\,,y)\to(0\,,0)} \frac{x^2}{x^2+y^4}$.

<u>De (7) :</u> Seja $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0\,,0)\} \to \mathbb{R}$, uma função dada por

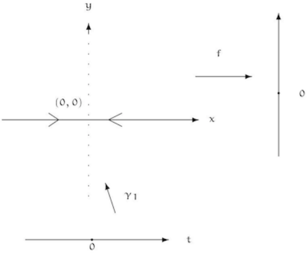
$$f(x\,,y) \doteq \frac{y^4}{x^3 + y^4}\,, \quad \text{para cada} \quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0\,,0)\}\,. \qquad (14)$$

Considerando-se a curva parametrizada $\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, dada por

$$\gamma_1(t) \doteq (t\,,0)\,, \quad \text{para} \quad t \in \mathbb{R}\,, \qquad (15)$$

teremos (figura abaixo): $\gamma_1(\overbrace{\ 0\ }^{=t_o}) = \overbrace{(0\,,0)}^{=\vec{x}_o}$ e

$$\lim_{t\to 0} f[\gamma_1(t)] \overset{(15)}{=} \lim_{t\to 0} f[(t\,,0)] \overset{(14)\ \text{com}\ t\neq 0}{=} \lim_{t\to 0} \frac{0^4}{t^3 + 0^4} = 0\,. \qquad (16)$$

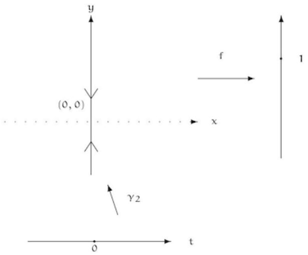


Considerando-se a curva parametrizada $\gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\gamma_2(t) \doteq (0\,,t)\,, \text{ para cada } \; t \in \mathbb{R}\,, \tag{17}$$

teremos (figura abaixo): $\gamma_2(\overbrace{\;0\;}^{=t_o}) = \overbrace{(0\,,0)}^{=\vec{x}_o}$ e

$$\lim_{t\to 0} f[\gamma_2(t)] \overset{(17)}{=} \lim_{t\to 0} f[(0\,,t)] \overset{(14)\text{ com } t\neq 0}{=} \lim_{t\to 0} \frac{t^4}{0^3 + t^4} = 1\,. \tag{18}$$



Logo, de (16), (18) e o Teorema acima, segue que não existe

$$\lim_{(x\,,y)\to(0\,,0)} \frac{y^4}{x^3 + y^4}\,.$$

De (8) **:** Seja $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ a função dada por

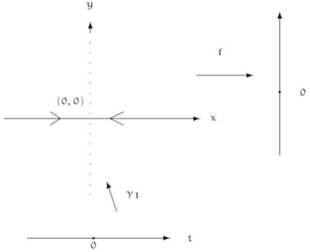
$$f(x,y) \doteq \frac{x\,y^2}{x^2+y^4}, \quad \text{para} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}. \qquad (19)$$

Considerando-se a curva parametrizada $\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\gamma_1(t) \doteq (t,0), \text{ para cada } t \in \mathbb{R}, \qquad (20)$$

teremos (figura abaixo): $\gamma_1(\overbrace{0}^{t_o}) = \overbrace{(0,0)}^{=\vec{x}_o}$ e

$$\lim_{t\to 0} f[\gamma_1(t)] \overset{(20)}{=} \lim_{t\to 0} f[(t,0)] \overset{(19)\text{ com } t\neq 0}{=} \lim_{t\to 0} \frac{t \cdot 0^2}{t^2+0^4} = 0. \qquad (21)$$



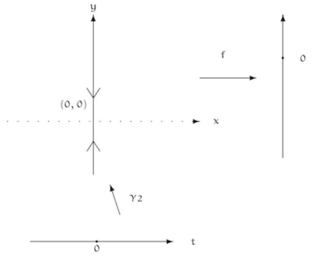
Considerando-se a curva parametrizada $\gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, dada por

$$\gamma_2(t) \doteq (0\,,t)\,, \quad \text{para} \quad t \in \mathbb{R}\,, \tag{22}$$

teremos (figura abaixo): $\gamma_2(\overbrace{\ 0\ }^{=t_o}) = \overbrace{(0\,,0)}^{=\vec{x}_o}$ e

$$\lim_{t\to 0} f[\gamma_2(t)] \overset{(22)}{=} \lim_{t\to 0} f[(0\,,t)] \overset{(19)\ \text{com}\ t\neq 0}{=} \lim_{t\to 0} \frac{0\cdot t^2}{0^2+t^4} = 0\,,$$

e assim **nada poderemos concluir**.

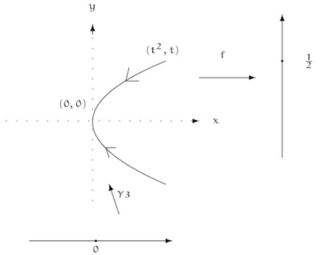


Considerando-se a curva parametrizada $\gamma_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, dada por

$$\gamma_3(t) \doteq \left(t^2\,,t\right)\;,\;\text{ para cada }\; t \in \mathbb{R}\,, \tag{23}$$

teremos (figura abaixo): $\gamma_3(\overbrace{\;0\;}^{=t_o}) = \overbrace{(0\,,0)}^{=\vec{x}_o}$ e

$$\lim_{t\to 0} f[\gamma_3(t)] \overset{(23)}{=} \lim_{t\to 0} f\left[\left(t^2, t\right)\right] \overset{(19),\text{com } t\neq 0}{=} \lim_{t\to 0} \frac{t^2 \cdot t^2}{t^4 + t^4} = \frac{1}{2}\,. \tag{24}$$



Logo, de (21), (24) e o Teorema, que não existe o limite

$$\lim_{(x\,,y)\to(0\,,0)} \frac{x\,y^2}{x^2 + y^4}\,.$$

Proposição

Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto não vazo, $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ funções, $\underline{\vec{x}_o}$ ponto de acumulação de $\underline{A}$, em $\underline{\mathbb{R}^n}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tais que existam

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_o} f(\vec{x}) = L_f \quad e \quad \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_o} g(\vec{x}) = L_g \,. \quad \textit{Então:}$$

- existe $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_o} (f \pm g)(\vec{x})$ e $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_o} (f \pm g)(\vec{x}) = L_f \pm L_g$,

  isto é: $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_o} (f \pm g)(\vec{x}) = \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_o} f(\vec{x}) \pm \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_o} g(\vec{x})$;

- existe $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_o} (f \cdot g)(\vec{x})$ e $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_o} (f \cdot g)(\vec{x}) = L_f \cdot L_g$,

  isto é: $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_o} (f \cdot g)(\vec{x}) = \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_o} f(\vec{x}) \cdot \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_o} g(\vec{x})$;

- se $L_g \neq 0$, existe $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_o} \left(\dfrac{f}{g}\right)(\vec{x})$ e $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_o} \left(\dfrac{f}{g}\right)(\vec{x}) = \dfrac{L_f}{L_g}$,

  isto é: $$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_o} \left(\frac{f}{g}\right)(\vec{x}) = \frac{\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_o} f(\vec{x})}{\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_o} g(\vec{x})} \,.$$

- em particular, existe $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_o} \left(\dfrac{1}{g}\right)(\vec{x})$ e $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_o} \left(\dfrac{1}{g}\right)(\vec{x}) = \dfrac{1}{L_g}$,

$$\text{isto é:} \quad \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_o} \left(\frac{1}{g}\right)(\vec{x}) = \frac{1}{\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_o} g(\vec{x})}\,.$$

- existe $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_o} (\alpha\, f)(\vec{x})$ e $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_o} (\alpha\, f)(\vec{x}) = \alpha\, L_f$,

$$\text{isto é,} \quad \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_o} (\alpha\, f)(\vec{x}) = \alpha \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_o} f(\vec{x})\,.$$

- se $L_f = 0$ e a função $\underline{h}$ seja limitada no ponto $\underline{\vec{x}_o}$, então existe $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_o} (f\cdot h)(\vec{x})$ e

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_o} (f\cdot h)(\vec{x}) = 0\,.$$

- temos que:

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_o} h(\vec{x}) = L_h \ \text{ se, e somente se, } \ \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_o} [h(\vec{x}) - L_h] = 0\,.$$

- (**<u>teorema da comparação</u>**) suponhamos que $r > 0$, é tal que

$$f(\vec{x}) \leq g(\vec{x}), \quad \text{para} \quad \vec{x} \in (\mathcal{B}_r(\vec{x}_o) \cap A) \setminus \{\vec{x}_o\}$$

então teremos $L_1 \leq L_2$,

isto é: $\displaystyle\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_o} f(\vec{x}) \leq \lim_{\vec{x} \to \vec{x}_o} g(\vec{x})$.

- (**<u>teorema do sanduíche</u>**) suponhamos que $r > 0$, é tal que

$$f(\vec{x}) \leq h(\vec{x}) \leq g(\vec{x}), \quad \text{para} \quad \vec{x} \in (\mathcal{B}_r(\vec{x}_o) \cap A) \setminus \{\vec{x}_o\}$$

e $L_f = L_g$, então, existirá o $\displaystyle\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_o} h(\vec{x})$ e

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_o} h(\vec{x}) = L_f = \lim_{\vec{x} \to \vec{x}_o} f(\vec{x}) = L_g = \lim_{\vec{x} \to \vec{x}_o} g(\vec{x}).$$

- (**teorema da conservação do sinal**) Suponhamos que

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_o} f(\vec{x}) = L_f > 0\,.$$

Então, podemos encontrar $r > 0$, de modo que

$$f(\vec{x}) > 0\,, \quad \text{para} \quad \vec{x} \in (\mathcal{B}_r(\vec{x}_o) \cap A) \setminus \{\vec{x}_o\}\,.$$

De modo análogo, se $L_f < 0$, podemos encontrar $s > 0$, de modo que

$$f(\vec{x}) < 0\,, \quad \text{para} \quad \vec{x} \in (B_s(\vec{x}_o) \cap A) \setminus \{\vec{x}_o\}\,.$$

Definição

Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *um subconjunto aberto de* $\underline{\mathbb{R}^n}$.
Diremos que a função $f : A \to \mathbb{R}$ *é um* **infinitésimo no ponto $\vec{x}_o$** *se*

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_o} f(\vec{x}) = 0 \,,$$

onde $\underline{\vec{x}_o}$ *é um ponto de acumulação do conjunto* $\underline{A}$, *em* $\underline{\mathbb{R}^n}$.

Observação

Deste modo o último item da Proposição acima, pode ser reescrito da seguinte forma:
"O produto de uma função que é infinitésimo no ponto $\underline{\vec{x}_o}$, *por uma função limitada no ponto* $\underline{\vec{x}_o}$, *será uma função que é infinitésimo no ponto* $\underline{\vec{x}_o}$*".*

Como consequência dos cinco primeiros itens da Proposição acima temos:

Corolário

Suponhamos que $p\,,q:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *são funções polinomiais.*

- *se* $\vec{x_o}\in\mathbb{R}^2$, *temos que*

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x_o}} p(\vec{x}) = p(\vec{x_o}) \quad e \quad \lim_{\vec{x}\to\vec{x_o}} q(\vec{x}) = q(\vec{x_o})\,.$$

- *se* $f:A\to\mathbb{R}$ *é uma função racional e* $\vec{x_1}\in A$, *segue que*

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x_1}} f(\vec{x}) = f(\vec{x_1})\,.$$

- *Valem os análogos dos itens acima para as respectivas funções definidas em* $\mathbb{R}^n$.

Exemplo

Calcule os limites, caso existam:

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x^5+y^4-2}{x^2+y^4+1} \tag{25}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[x \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{x^2-y^3}\right)\right] \tag{26}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^4} \tag{27}$$

Resolução:

De (25): consideremos as funções $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dadas por

$$f(x,y) \doteq x^5+y^4-2 \tag{28}$$

$$\text{e} \quad g(x,y) \doteq x^2+y^4+1\,, \quad \text{para} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2\,. \tag{29}$$

Então

$$
\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(1,-1)} f(x,y) &\overset{(28)}{=} \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \left(x^5 + y^4 - 2\right) \\
&= \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \left(x^5\right) + \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \left(y^4\right) - \lim_{(x,y)\to(1,-1)} 2 \\
&= \left(\lim_{(x,y)\to(1,-1)} x\right)^5 + \left(\lim_{(x,y)\to(1,-1)} y\right)^4 - \lim_{(x,y)\to(1,-1)} 2 \\
&= 1^5 + (-1)^4 - 2 = 0 \quad \text{e} \qquad (30)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(1,-1)} g(x,y) &\overset{(29)}{=} \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \left(x^2 + y^4 + 1\right) \\
&= \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \left(x^2\right) + \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \left(y^4\right) + \lim_{(x,y)\to(1,-1)} 1 \\
&= \left(\lim_{(x,y)\to(1,-1)} x\right)^2 + \left(\lim_{(x,y)\to(1,-1)} y\right)^4 + \lim_{(x,y)\to(1,-1)} 1 \\
&= 1^2 + (-1)^4 + 1 = 3 \neq 0 \,. \qquad (31)
\end{aligned}
$$

Logo, da Proposição acima, segue que

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x^5+y^4-2}{x^2+y^4+1} = \frac{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-1)}\left(x^5+y^4-2\right)}{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-1)}\left(x^2+y^4+1\right)}$$

$$\overset{(28),(29)}{=} \frac{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-1)} f(x,y)}{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-1)} g(x,y)} \overset{(30),(31)}{=} \frac{0}{3} = 0\,. \tag{32}$$

De (26)**:** consideremos as funções $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ e $g: A \doteq \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\ y^3 = x^2\right\} \to \mathbb{R}$, dadas por

$$f(x,y) \doteq x\,, \quad \text{para} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2 \tag{33}$$

$$\text{e} \qquad g(x,y) \doteq \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{x^2-y^3}\right), \quad \text{para} \quad (x,y)\in A\,. \tag{34}$$

Observemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \overset{(33)}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0 \quad \text{e} \tag{35}$$

$$|g(x,y)| \overset{(34)}{=} \left|\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{x^2-y^3}\right)\right| \leq 1\,, \quad \text{para} \quad (x,y) \in A\,. \tag{36}$$

Logo, do item 3. da Proposição acima, segue que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[x \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{x^2-y^3}\right)\right] \overset{(33) \text{ e } (34)}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} [f(x,y)\, g(x,y)]$$
$$\overset{(35) \text{ e} (36)}{=} 0\,.$$

<u>De (27):</u> consideremos as funções $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g : A \doteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, dadas por

$$f(x,y) \doteq x\,, \quad \text{para} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \tag{37}$$

$$\text{e} \quad g(x,y) \doteq \frac{x^2}{x^2+y^4}\,, \quad \text{para} \quad (x,y) \in A\,. \tag{38}$$

Observemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \overset{(37)}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0\,. \tag{39}$$

$$\text{e} \quad |g(x,y)| \overset{(38)}{=} \left|\frac{x^2}{x^2+y^4}\right| \overset{x^2\leq x^2+y^4}{\leq} \left|\frac{x^2+y^4}{x^2+y^4}\right| = 1$$

$$, \quad \text{para} \quad (x,y)\in A\,. \tag{40}$$

Logo, do item 3. da Proposição acima, segue que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x\,\frac{x^2}{x^2+y^4}\right)$$

$$\overset{(37)\text{ e }(38)}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} [f(x,y)\,g(x,y)] \overset{(39)\text{ e }(40)}{=} 0\,. \tag{41}$$

$\square$

Observação

*Vale observar que em (26) e (27) do Exemplo acima, **NÃO** podemos aplicar que o limite do produto é igual ao produto dos limites, pois*

$$\text{não existe} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x^2-y^2}$$
$$\text{e} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^4\right) = 0\,.$$

Teorema

Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *um subconjunto não vazio de* $\mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$ *uma função e* $\vec{x}_o$ *um ponto de acumulação do conjunto* A, *em* $\mathbb{R}^n$, *tal que existe o limite* $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}_o} f(\vec{x})$ *e*

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_o} f(\vec{x}) = L\,. \tag{42}$$

Suponhamos que $I \subseteq \mathbb{R}$ *é um intervalo aberto,* $L \in I$, $g : I \setminus \{L\} \to \mathbb{R}$ *é uma função tal que existe o limite* $\lim\limits_{t \to L} g(t)$ *e*

$$\lim_{t \to L} g(t) = M\,. \tag{43}$$

Então, existe o limite $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}_o} g[f(\vec{x})]$ *e*

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_o} g\,[f\,(\vec{x})] = M\,. \tag{44}$$

Observação

O Teorema acima, pode ser visto como um modo de "mudar de variáveis" no limite considerado: queremos calcular o seguinte limite (caso exista):

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_o} g\left[f\left(\vec{x}\right)\right] . \tag{45}$$

Para tanto, se considerarmos a "mudança de variáveis":

$$t \doteq f(\vec{x}) \,, \quad para \quad \vec{x} \in A \,, \tag{46}$$

no limite (45) *acima, de* (42), *segue que*

$$se \quad \vec{x} \to \vec{x}_o \,, \quad teremos \quad t = f(\vec{x}) \to L \,. \tag{47}$$

$$assim \quad \lim_{\vec{x} \to \vec{x}_o} g\left[f\left(\vec{x}\right)\right] \overset{(46)\, e\, (47)}{=} \lim_{t \to L} g[t] \overset{(43)}{=} M \,,$$

Observação

Em particular, se no Teorema acima, tivermos que a função $g : I \to \mathbb{R}$ é contínua em $L \in I$, o resultado acima permanecerá válido, pois neste caso

$$\lim_{t \to L} g(t) = g(L)\,,$$

isto é, $$M \doteq g(L)\,,$$

e assim teremos: $$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_o} g[f(\vec{x})] = g(L)\,,$$

ou seja, vale a seguinte identidade:

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_o} g[f(\vec{x})] = g\left[\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_o} f(\vec{x})\right]\,, \tag{48}$$

ou, a grosso modo, podemos "trocar" o limite, quando $\vec{x} \to \vec{x}_o$, com a função $\underline{g}$.

Exemplo

Mostre que existe e calcule o valor do seguinte limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left(\frac{x^3}{x^2+y^4}\right). \qquad (49)$$

Resolução: consideremos a função $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x,y) \doteq \frac{x^3}{x^2+y^4}, \quad \text{para} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}. \qquad (50)$$

Vimos de (27) do Exemplo acima, segue que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \overset{(50)}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^4} = 0 \doteq L. \qquad (51)$$

Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a função dada por

$$g(t) \doteq \cos(t), \quad \text{para} \quad t \in \mathbb{R}. \qquad (52)$$

Do Cálculo I, segue que a função $\underline{g}$ é uma função contínua em $\underline{\mathbb{R}}$, em particular em

$$t = 0 \overset{(51)}{=} L\,.$$

Logo, da Observação acima, segue que

$$\lim_{(x\,,y)\to(0\,,0)} \cos\left(\frac{x^3}{x^2+y^4}\right) = \lim_{(x,y)\to(0\,,0)} g[f(x\,,y)]$$

$$\overset{(48)}{=} g\left[\underbrace{\lim_{(x\,,y)\to(0\,,0)} f(x\,,y)}_{\overset{(51)}{=}0}\right] = \cos(0) = 1\,.$$

$\square$