Continuidade funções a valores reais, de várias variáveis reais

Definição

Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *um subconjunto aberto em* $\mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$ *uma função e* $\vec{x}_o \in A$. *Diremos que a função* $\underline{f}$ *é* **contínua em** $\underline{\vec{x}_o}$ *se, e somente se,*

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_o} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_o)\,. \tag{1}$$

Se a função $\underline{f}$ *é contínua em cada um dos pontos do conjunto* $\underline{A}$, *diremos que ela é* **contínua no conjunto** $\underline{A}$ *ou, simplesmente,* **contínua em** $\underline{A}$

Observação

- *Para uma função ser contínua em $\underline{\vec{x}_o}$, devemos ter:*

$$\begin{aligned} \textit{existe} \qquad & f(\vec{x}_o)\,, \\ \textit{existe o limite} \qquad & \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_o} f(\vec{x})\,, \\ \textit{e, além disso, devemos ter:} \qquad & \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_o} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_o)\,. \end{aligned}$$

- *Como conseqüência da Definição de limites para funções a valores reais, de várias variáveis reais, temos que a função $\underline{f}$ é contínua em $\underline{\vec{x}_o}$ se, e somente se,*

$$\begin{aligned} & \textit{dado } \varepsilon > 0, \\ & \textit{podemos encontrar } \delta > 0\,, \textit{ de modo que, se } \vec{x} \in A \\ & \textit{satisfaz } \ \|\vec{x} - \vec{x}_o\| < \delta\,, \\ & \textit{deveremos ter } \ |f(\vec{x}) - f(\vec{x}_o)| < \varepsilon\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Exemplo

Em cada um dos itens abaixo, encontrar o maior conjunto onde a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ será contínua.

$$f(x\,,y) \doteq k\,, \quad para \quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,. \tag{3}$$

$$f(x\,,y) \doteq x\,, \quad para \quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,. \tag{4}$$

$$f(x\,,y) \doteq y\,, \quad para \quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,. \tag{5}$$

$$f(x\,,y) \doteq \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\,, & (x\,,y) \neq (0\,,0) \\ 0\,, & (x\,,y) = (0\,,0) \end{cases} \tag{6}$$

$$f(x\,,y) \doteq \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}\,, & (x\,,y) \neq (0\,,0) \\ 0\,, & (x\,,y) = (0\,,0) \end{cases}\,. \tag{7}$$

Resolução:

De (3)**:** de um Exemplo anterior, temos

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) \overset{(3)}{=} \lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} k = k \overset{(3)}{=} f(x_o,y_o),$$

ou seja, $$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) = f(x_o,y_o).$$

Logo da Definição acima, segue que a função $\underline{f}$ é contínua em cada $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$, ou seja, a função $\underline{f}$ é contínua em $\underline{\mathbb{R}^2}$.

De (4)**:** de um Exemplo anterior, temos que

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) \overset{(4)}{=} \lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} x = x_o \overset{(4)}{=} f(x_o,y_o),$$

ou seja, $$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) = f(x_o,y_o).$$

Logo da Definição acima, segue que a função $\underline{f}$ é contínua em cada $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$, ou seja, a função $\underline{f}$ é contínua em $\underline{\mathbb{R}^2}$.

De (5): de um Exemplo anterior, temos que

$$\lim_{(x\,,y)\to(x_o\,,y_o)} f(x\,,y) \overset{(5)}{=} \lim_{(x\,,y)\to(x_o\,,y_o)} y = y_o \overset{(5)}{=} f(x_o\,,y_o)\,,$$

ou seja, $\displaystyle\lim_{(x\,,y)\to(x_o\,,y_o)} f(x\,,y) = f(x_o\,,y_o).$

Logo da Definição acima, segue que a função $\underline{f}$ é contínua em cada $(x_o\,,y_o) \in \mathbb{R}^2$, ou seja, a função $\underline{f}$ é contínua em $\underline{\mathbb{R}^2}$.

De (6): se $(x_o\,,y_o)\neq(0\,,0)$, como

$$\lim_{(x\,,y)\to(x_o\,,y_o)}\left(x^2+y^2\right)={x_o}^2+{y_o}^2\neq 0\,,$$

então $$\lim_{(x\,,y)\to(x_o\,,y_o)} f(x\,,y) \overset{(6)\text{ com }(x\,,y)\neq(0\,,0)}{=} \lim_{(x\,,y)\to(x_o\,,y_o)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{{x_o}^2-{y_o}^2}{{x_o}^2+{y_o}^2}\overset{(6)}{=}f(x_o\,,y_o)\,,$$

Se $(x_o\,,y_o)=(0\,,0)$, temos que não existirá o limite (veja as notas de aula)

$$\lim_{(x\,,y)\to(x_o\,,y_o)} f(x\,,y) \overset{(6)\text{ com }(x\,,y)\neq(0\,,0)}{=} \lim_{(x\,,y)\to(0,,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,,$$

logo, da Definição acima, a função $\underline{f}$ é contínua em $\mathbb{R}^2\setminus\{(0\,,0)\}$.

De 7: se $(x_o\,,y_o)\neq(0\,,0)$, como

$$\lim_{(x\,,y)\to(x_o\,,y_o)}\left(x^2+y^2\right)={x_o}^2+{y_o}^2\neq 0\,,$$

então $$\lim_{(x\,,y)\to(x_o\,,y_o)} f(x\,,y)\overset{(7),\ \text{com}\ (x\,,y)\neq(0\,,0)}{=}\lim_{(x\,,y)\to(x_o\,,y_o)}\frac{x^3}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{{x_o}^3}{{x_o}^2+{y_o}^2}\overset{(7)}{=}f(x_o\,,y_o)\,,$$

Se $(x_o\,,y_o)=(0\,,0)$, teremos

$$\lim_{(x\,,y)\to(0\,,0)}\frac{x^3}{x^2+y^2}\overset{(7),\ \text{com}\ (x\,,y)\neq(0\,,0)}{=}\lim_{(x\,,y)\to(0\,,0)} f(x\,,y)$$

$$\overset{\text{visto em Exemplo anterior}}{=}0\overset{(7),\ \text{com}\ (x\,,y)=(0\,,0)}{=}f(0\,,0)\,.$$

Logo, da Definição acima, a função $\underline{f}$ é contínua em $\mathbb{R}^2$.

$\square$

Temos a:

Proposição

Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto em $\mathbb{R}^n$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ funções, $\vec{x}_o \in A$, f, g são contínuas em $\underline{\vec{x}_o}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ então:

- *as funções $\underline{f \pm g}$ serão contínua em $\underline{\vec{x}_o}$;*
- *a função $\underline{f \cdot g}$ será contínua em $\underline{\vec{x}_o}$;*
- *a função $\underline{\alpha\, f}$ será contínua em $\underline{\vec{x}_o}$;*
- *Se $g(\vec{x}_o) \neq 0$, a função $\left(\dfrac{f}{g}\right)$ será contínua em $\underline{\vec{x}_o}$.*

  Em particular, a função $\left(\dfrac{1}{g}\right)$ será contínua em $\underline{\vec{x}_o}$.

Como conseqüência da Proposição acima temos o:

Corolário

Toda função polinomial de n-variáveis, é contínua em $\underline{\mathbb{R}^n}$ e toda função racional de n-variáveis, é contínua no seu domínio.

Temos também o:

Corolário

Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto em $\underline{\mathbb{R}^n}$, $f : A \to \mathbb{R}$ contínua em $\vec{x}_o \in A$, $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto tal que $Im(f) \subseteq I$ e $g : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $f(\vec{x}_o)$.
Então $\underline{g \circ f}$ será contínua em $\underline{\vec{x}_o}$.

Concluímos com um resultado sobre funções contínuas definida em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$ (veja a seção F.4 do Apêndice F), a saber:

Teorema

Sejam $\underline{A}$ é um subconjunto, não vazio, compacto de $\underline{\mathbb{R}^n}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $\underline{A}$. Então existem

$$\vec{x}_1 , \vec{x}_2 \in A , \text{ tais que } f(\vec{x}_1) \leq f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_2) , \text{ para cada } \vec{x} \in A ,$$

isto é, a função $\underline{f}$ atinge seu máximo e seu mínimo globais no conjunto $\underline{A}$.