Derivadas parciais funções a valores reais, de variáveis reais

Começaremos com funções a valores reais, de **duas** variáveis reais, e mais tarde tratemos do caso geral.

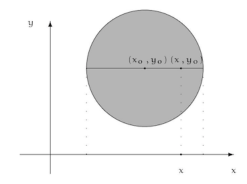
Observação

Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^2$ *um conjunto aberto de* $\underline{\mathbb{R}^2}$, $(x_o\,, y_o) \in A$, $f : A \to \mathbb{R}$ *uma função, que denotaremos por* $z = f(x\,, y)$.

Como $(x_o\,, y_o) \in A$ *e* $\underline{A}$ *é um subconjunto aberto em* $\underline{\mathbb{R}^2}$, *podemos encontrar* $\delta > 0$, *tal que* $\mathcal{B}_\delta((x_o\,, y_o)) \subseteq A$.

Logo podemos definir a função $g : D(g) \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$g(x) \doteq f(x\,, y_o)\,, \text{ para cada } x \in D(g)\,, \text{onde} \quad (1)$$
$$D(g) \doteq \{x \in \mathbb{R}\,;\ (x\,, y_o) \in \mathcal{B}_\delta((x_o\,, y_o))\} \subseteq \mathbb{R}\,.$$



Na situação acima:

Definição

Se a função $g : D(g) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por (1), for uma função diferenciável em $\underline{x_o}$ (Cálculo 1), então sua derivada em $\underline{x_o}$, isto é, $\underline{g'(x_o)}$, será denominada **derivada parcial (de primeira ordem) da função $\underline{f}$, em relação à variável $\underline{x}$, no ponto $(x_o\,, y_o)$** *e indicada por:*

$$\frac{\partial f}{\partial_x}(x_o\,, y_o)\,, \quad f_x(x_o\,, y_o)\,, \quad \partial_x f(x_o\,, y_o)\,,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_o\,, y_o)\,, \quad z_x(x_o\,, y_o) \quad ou \quad \partial_x z(x_o\,, y_o)\,.$$

$$onde \quad z = f(x\,, y)\,.$$

Observação

- *Na situação da Definição acima, temos que*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_o\,,y_o) = g\,'(x_o) \overset{\textit{Cálculo 1}}{=} \lim_{x\to x_o}\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o} \qquad (2)$$

$$\overset{(1)}{=} \lim_{x\to x_o}\frac{f(x\,,y_o)-f(x_o\,,y_o)}{x-x_o}$$

$$\overset{\Delta x \doteq x - x_o}{=} \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_o+\Delta x\,,y_o)-f(x_o,y_o)}{\Delta x}$$

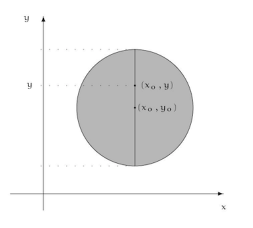
$$\overset{h \doteq \Delta x}{=} \lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h\,,y_o)-f(x_o\,,y_o)}{h}\,.$$

- *Se* $B \doteq \left\{(x\,,y)\in A\,;\quad \textit{existe}\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\right\}$, *podemos definir a função* $\dfrac{\partial f}{\partial x} : B \to \mathbb{R}$, *será denominada* **função derivada (de primeira ordem) da função f, em relação à variável x.**

Observação

Utilizando as notações acima, podemos definir a função $h : D(h) \to \mathbb{R}$, dada por

$$h(y) \doteq f(x_o\,, y)\,, \text{ para cada } y \in D(h)\,, \quad \text{onde} \\ D(h) \doteq \{y \in \mathbb{R}\,;\ (x_o\,, y) \in \mathcal{B}_\delta((x_o\,, y_o))\} \subseteq \mathbb{R}\,. \tag{3}$$



Na situação acima:

Definição

Se a função $h : D(h) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *dada por* (3), *for uma função diferenciável em* $\underline{y_o}$ *(Cálculo 1), então sua derivada em* $\underline{y_o}$, *isto é,* $\underline{h'(y_o)}$, *será denominada* **derivada parcial (de primeira ordem) da função $\underline{f}$, em relação à variável $\underline{y}$, no ponto $(x_o\,, y_o)$** *e indicada por:*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_o\,, y_o)\,,\ f_y(x_o\,, y_o)\,,\ \partial_y f(x_o\,, y_o)\,,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_o\,, y_o)\,,\ z_y(x_o\,, y_o)\ \ \textit{ou}\ \ \partial_y z(x_o\,, y_o)\,,$$
$$\textit{onde}\ \ z = f(x\,, y)\,.$$

Observação

- *Na situação da Definição acima, temos que*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_o\,,y_o) = h'(y_o) \overset{\text{Cálculo 1}}{=} \lim_{y\to y_o} \frac{h(y)-h(y_o)}{y-y_o} \qquad (4)$$

$$\overset{(3)}{=} \lim_{y\to y_o} \frac{f(x_o\,,y)-f(x_o\,,y_o)}{y-y_o}$$

$$\overset{\Delta y \doteq y-y_o}{=} \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x_o\,,y_o+\Delta y)-f(x_o,y_o)}{\Delta y}$$

$$\overset{h\doteq\Delta y}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x_o\,,y_o+h)-f(x_o\,,y_o)}{h}\,.$$

- *Se* $B \doteq \left\{(x\,,y)\in A\,;\ \ \text{existe}\ \frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y)\right\}$*, podemos definir a função* $\frac{\partial f}{\partial x}: B \to \mathbb{R}$*, será denominada* **função derivada (de primeira ordem) da função** $\underline{f}$**, em relação à variável** $\underline{y}$.

Observação

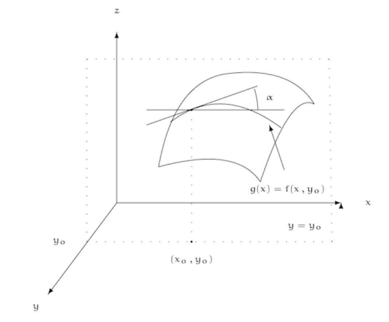
Interpretação geométrica para as derivadas parciais de 1.a ordem:
A representação geométrica do gráfico da função

$$g(x) \doteq f(x\,,y_o)\,, \quad para \quad x \in D(g)\,,$$

será um curva, contida na representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$*, cujo do traço pode ser obtido fazendo-se a intersecção, em* $\underline{\mathbb{R}^3}$*, do plano*

$$y = y_o\,,$$

com a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$*.*



Observação

Do Cálculo I, $\underline{g'(x_o)}$ nos fornece o valor do coeficiente angular da reta tangente à representação geométrica do gráfico da função $\underline{g}$, no ponto $\underline{x_o}$, isto é, é igual $\underline{\mathrm{tg}(\alpha)}$ (figura acima).
No nosso caso, relativamente ao plano

$$y = y_o\,,$$

a inclinação da reta tangente à representação geométrica do traço da curva $z = g(x)$, no ponto $\underline{(x_o\,, g(x_o))}$, será dada por $\underline{g'(x_o)}$, isto é, por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_o\,, y_o)\,.$$

Observação

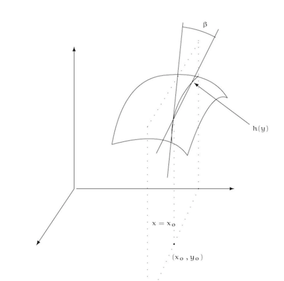
De modo semelhante, geometricamente, a derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_o\,,y_o)$ *será, relativamente ao plano* $x = x_o$, *o coeficiente angular da reta tangente à representação geométrica do traço da curva*

$$y \to (x_o\,,h(y))\,, \quad para \quad y \in D(h)\,,$$

(figura abaixo) obtida da intersecção do plano

$$x = x_o\,,$$

com a representação geométrica do gráfico da função $z = f(x\,,y)$, *no ponto* $((x_o\,,y_o)\,,f(x_o\,,y_o))$.



Exemplo

Consideremos a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função dada por*

$$f(x\,,y) \doteq x^2\,y\,, \quad para \;\; (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,. \tag{5}$$

Calcule, se existir, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1\,,-1)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1\,,-1)$ *e, onde existir ,* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x\,,y)$.

Resolução:

$$\text{Neste caso, temos que:} \quad (x_o\,,y_o) \doteq (1\,,-1)\,. \tag{6}$$

Definamos a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$g(x) \doteq f(x\,,y_o) \overset{y_o \overset{(6)}{=} -1}{=} f(x\,,-1) \overset{(5)}{=} x^2 \cdot (-1) = -x^2\,, \tag{7}$$

para $x \in \mathbb{R}$.

Como a função $\underline{g}$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ (Cálculo 1), em particular, será diferenciável em $x_o = 1$, segue que existe $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_o\,, y_o) \overset{(6)}{=} \dfrac{\partial f}{\partial x}(1\,, -1)$ e:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1\,, -1) \overset{(6)}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x_o\,, y_o) \overset{(2)}{=} g\,'(x_o) \overset{x_o \overset{(6)}{=} 1}{=} g\,'(1)$$

$$\overset{(7)}{=} \left[\underbrace{\frac{d}{dx}\left(-x^2\right)}_{\text{visto na disciplina de Cálculo 1}} \underset{=}{} -2x \right]\Bigg|_{x=1} = [-2\,x]\,|_{x=1} = -2\,.$$

De modo semelhante,definido-se a função $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$h(y) \doteq f(x_o\,,y) \overset{x_o\overset{(6)}{=}1}{=} f(1\,,y) \overset{(5)}{=} 1^2 \cdot y = y\,, \tag{8}$$

para $y \in \mathbb{R}$, como a função $\underline{h}$ é diferenciável em $\underline{\mathbb{R}}$ (Cálculo 1), em particular será diferenciável em $y_o = -1$.

Logo, existe $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_o\,,y_o) \overset{(6)}{=} \dfrac{\partial f}{\partial y}(1\,,-1)$ e:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1\,,-1) \overset{(6)}{=} \frac{\partial f}{\partial y}(x_o\,,y_o) \overset{(4)}{=} h'(y_o) \overset{y_o\overset{(6)}{=}-1}{=} h'(-1)$$

$$\overset{(8)}{=} \left.\left[\underbrace{\frac{d}{dy}y}_{=1}\right]\right|_{y=-1} = 1\,.$$

Para cada $(x_o\,, y_o) \in \mathbb{R}^2$ fixado, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_o\,, y_o) \overset{g(x) \doteq f(x\,,y_o) \overset{(5)}{=} x^2\,y_o \text{ e } (2)}{=} g'(x_o)$$

$$= \left[\underbrace{\frac{d}{dx}\left(x^2\,y_o\right)}_{\text{visto na disciplina de Cálculo 1} \atop =} 2\,x\,y_o \right]\Bigg|_{x=x_o} = [2\,x\,y_o]|_{x=x_o} = 2\,x_o\,y_o\,,$$

$$\text{e } \frac{\partial f}{\partial y}(x_o\,, y_o) \overset{h(y) \doteq f(x_o\,,y) \overset{(5)}{=} x_o{}^2\,y \text{ e } (4)}{=} h'(y_o)$$

$$= \left[\underbrace{\frac{d}{dy}\left(x_o{}^2\,y\right)}_{\text{visto na disciplina de Cálculo 1} \atop =} x_o^2 \right]\Bigg|_{y=y_o} = \left[x_o{}^2\right]\Big|_{y=y_o} = x_o{}^2\,,$$

isto é, existem as derivadas parciais de primeira ordem da função $\underline{f}$ em cada ponto $(x_o\,, y_o) \in \mathbb{R}^2$. $\square$

Exemplo

Consideremos a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x\,,y) \doteq x^2 \,\mathrm{sen}(x+y) + y\,\cos(x), \quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{9}$$

Calcule, caso existam, $f_x\left(\frac{\pi}{2}\,,0\right)$ *e* $f_y\left(\frac{\pi}{2}\,,0\right)$ *e, onde existir, calcule* $f_x(x\,,y)$ *e* $f_y(x\,,y)$.

Resolução: neste caso

$$(x_o\,,y_o) \doteq \left(\frac{\pi}{2}\,,0\right). \tag{10}$$

Considerando-se a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$g(x) \doteq f(x\,,y_o) \overset{y_o \overset{(10)}{=} 0}{=} f(x\,,0) \overset{(9)}{=} x^2 \,\mathrm{sen}(x) + \underbrace{0\,\cos(x)}_{=0} = x^2\,\mathrm{sen}(y)\,,$$

para $x \in \mathbb{R}$, e temos que a função $\underline{g}$ será diferenciável em $\underline{\mathbb{R}}$ (Cálculo 1), em particular, no ponto $x_o = \dfrac{\pi}{2}$.

Logo $f_x\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \overset{(10)}{=} f_x(x_o, y_o) \overset{(2)}{=} g'(x_o) \overset{x_o \overset{(10)}{=} \frac{\pi}{2}}{=} g'\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$= \left\{ \frac{d}{dx}\left[x^2 \operatorname{sen}(x)\right] \right\}\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} \overset{\text{Cálculo 1}}{=} \left\{2\,x\,\operatorname{sen}(x) + x^2\,\cos(x)\right\}\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\,\frac{\pi}{2}\,\underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} = 2\,\frac{\pi}{2} = \pi\,.$$

Por outro lado, considerando-se $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(y) \doteq f(x_o, y) \overset{x_o \overset{(10)}{=} \frac{\pi}{2}}{=} f\left(\frac{\pi}{2}, y\right) \overset{(9)}{=} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + y\right) + y\,\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + y\right), \quad \text{para} \quad y \in \mathbb{R}\,,$$

temos que a função $\underline{h}$ será diferenciável em $\underline{\mathbb{R}}$ (Cálculo 1), em particular, será diferenciável em $y_o = 0$.

Logo: $f_y\left(\frac{\pi}{2},0\right) \overset{(10)}{=} f_y(x_o\,,y_o) \overset{(4)}{=} h'(y_o) \overset{y_o\overset{(10)}{=}0}{=} h'(0)$

$$= \left\{\frac{d}{dy}\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+y\right)\right]\right\}\bigg|_{y=0} \overset{\text{Cálculo 1}}{=} \left\{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi}{2}+y\right)\right\}\bigg|_{y=0}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} = 0\,.$$

Para cada $(x_o\,,y_o) \in \mathbb{R}^2$, teremos:

$$f_x(x_o\,,y_o) \overset{\text{se } g(x) \doteq f(x\,,y_o) \overset{(9)}{=} x^2 \operatorname{sen}(x+y_o)+y_o\cos(x) \text{ e } (2)}{=} g'(x_o)$$

$$= \left\{\frac{d}{dx}\left[x^2 \operatorname{sen}(x+y_o) + y_o\cos(x)\right]\right\}\bigg|_{x=x_o}$$

$$\overset{\text{Cálculo 1}}{=} \left\{2\,x \operatorname{sen}(x+y_o) + x^2\cos(x+y_o) - y_o \operatorname{sen}(x)\right\}\big|_{x=x_o}$$

$$= 2\,x_o \operatorname{sen}(x_o+y_o) + x_o^2\cos(x_o+y_o) - y_o \operatorname{sen}(x_o)\,.$$

$$e \quad f_y(x_o\,,y_o) \overset{\text{se } h(y) \doteq f(x_o\,,y) \overset{(9)}{=} x_o^2 \ \mathrm{sen}(x_o+y)+y\ \cos(x_o) \text{ e } (4)}{=} h'(y_o)$$

$$= \left\{ \frac{d}{dy} \left[x_o^2 \ \mathrm{sen}(x_o+y) + y\ \cos(x_o) \right] \right\} \Big|_{y=y_o}$$

$$\overset{\text{visto na disciplina de Cálculo 1}}{=} \left\{ x_o^2 \ \cos(x_o+y) + \cos(x_o) \right\} \Big|_{y=y_o}$$

$$= x_o^2 \ \cos(x_o+y_o) + \cos(x_o)\,,$$

isto é, existem as derivadas parciais de primeira ordem da função $\underline{f}$ em $\underline{\mathbb{R}^2}$. $\square$

O caso a seguir é um pouco mais elaborado e sua resolução pode ser encontrada nas notas de aula.

Exemplo

Consideremos a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$f(x\,,y) \doteq \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^2}{x^2 + y^2}\,, & para\ (x\,,y) \neq (0\,,0) \\ 0\,, & para\ (x\,,y) = (0\,,0) \end{cases}.$$

Calcule, caso existam, $f_x(0\,,0)$ *e* $f_y(0\,,0)$.

Observação

Notemos que, no Exemplo acima, **existe** *a derivada parcial* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0\,,0)$, *mas* **não existe** *a derivada parcial* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0\,,0)$, *ou seja, pode acontecer de uma função possuir uma das derivadas parciais de 1.a ordem sem que,* **necessariamente**, *possua a outra derivada parcial de 1.a ordem, em um mesmo ponto.*

Observação

Podemos definir as derivadas parciais de uma função a valores real, de n-variáveis reais, de modo análogo. Veja detalhes nas notas de aula

Exemplo

Consideremos a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$f(x, y, z) \doteq x \cos(y) + z, \quad para \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \tag{11}$$

Encontre, se existirem, as derivadas parciais de primeira ordem da função $\underline{f}$, *em relação a* $\underline{x}$, $\underline{y}$ *e* $\underline{z}$, *em cada ponto de* $\underline{\mathbb{R}^3}$.

Resolução: para cada $(x_o\,,y_o\,,z_o)\in\mathbb{R}^3$ teremos:

$$f_x(x_o\,,y_o\,,z_o) \overset{\text{se } g(x)\doteq f(x\,,y_o\,,z_o)\overset{(11)}{=}x\ \cos(y_o)+z_o}{=} g'(x_o)$$
$$= \left\{\frac{d}{dx}[x\ \cos y_o + z_o]\right\}\Bigg|_{x=x_o} \overset{\text{Cálculo 1}}{=} \cos(y_o)\,.$$

$$f_y(x_o\,,y_o\,,z_o) \overset{\text{se } h(y)\doteq f(x_o\,,y\,,z_o)\overset{(11)}{=}x_o\ \cos(y)+z_o}{=} h'(y_o)$$
$$= \left\{\frac{d}{dy}[x_o\ \cos y + z_o]\right\}\Bigg|_{y=y_o} \overset{\text{Cálculo 1}}{=} -x_o\ \mathrm{sen}(y_o)\,.$$

$$f_z(x_o\,,y_o\,,z_o) \overset{\text{se } t(z)\doteq f(x_o\,,y_o\,,z)\overset{(11)}{=}x_o\ \cos(y_o)+z}{=} t'(z_o)$$
$$= \left\{\frac{d}{dz}[x_o\ \cos y_o + z]\right\}\Bigg|_{z=z_o} \overset{\text{Cálculo 1}}{=} 1\,.$$

Portanto a função $\underline{f}$ tem derivadas parciais de primeira ordem, em relação a $\underline{x}$, $\underline{y}$ e $\underline{z}$, em cada ponto de $\underline{\mathbb{R}^3}$. $\square$

Exemplo

Para $n \in N$ fixado, consideremos as funções $f\,,g\,,h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dadas por

$$f(x\,,y) \doteq k\,, \tag{12}$$
$$g(x\,,y) \doteq x^n\,, \tag{13}$$
$$h(x\,,y) \doteq y^n\,. \tag{14}$$

para $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que as funções $\underline{f}$, $\underline{g}$ e $\underline{h}$ possuem derivadas parciais de 1.a ordem em relação à $\underline{x}$ e em relação à $\underline{y}$, em cada por de $\mathbb{R}^2$ e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y) = 0\,,\ \frac{\partial g}{\partial x}(x\,,y) = n\,x^{n-1}\,,$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x\,,y) = 0\,,\ \frac{\partial h}{\partial x}(x\,,y) = 0 \text{ e } \frac{\partial h}{\partial y}(x\,,y) = n\,y^{n-1}$$

para $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$.

Resolução: para cada $(x_o\,,y_o)\in\mathbb{R}^2$, definamos a função $g_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por

$$g_1(x)\doteq g(x\,,y_o)\overset{(13)}{=}x^n\,. \tag{15}$$

$$\text{Com isto:}\quad \frac{\partial g}{\partial x}(x_o\,,y_o)\overset{(2)}{=}g_1{}'(x_o)\overset{(15),\text{Cálculo 1}}{=}n\,x_o{}^n\,,$$

mostrando a existência da derivada parcial de 1.a ordem, em relação à $\underline{x}$, no ponto $\underline{(x_o\,,y_o)}$.
Definamos a função $g_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por

$$g_2(y)\doteq g(x_o\,,y)\overset{(13)}{=}x_o{}^n\,. \tag{16}$$

$$\text{Com isto}\quad \frac{\partial g}{\partial y}(x_o\,,y_o)\overset{(4)}{=}g_2{}'(y_o)\overset{(16),\text{Cálculo 1}}{=}0\,,$$

mostrando a existência da derivada parcial de 1.a ordem, em relação à $\underline{y}$, no ponto $\underline{(x_o\,,y_o)}$.
De modo semelhante podemos mostrar as outras identidades.

Para funções a valores reais, **de duas variáveis** reais, temos a:

Proposição

Sejam $\underline{A}$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$, $(x_o\,,y_o) \in A$ e $f\,,g : A \to \mathbb{R}$ funções que possuam derivadas parciais de 1.a ordem, em relação à $\underline{x}$, no ponto $\underline{(x_o\,,y_o)}$ e $c \in \mathbb{R}$. Então:

- *as funções $\underline{f \pm g}$ admitirá derivada parcial de 1.a ordem, em relação à $\underline{x}$, no ponto $\underline{(x_o\,,y_o)}$ e*
$$\frac{\partial(f \pm g)}{\partial x}(x_o\,,y_o) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_o\,,y_o) \pm \frac{\partial g}{\partial x}(x_o\,,y_o)\,.$$
- *a função $\underline{c \cdot f}$ admitirá derivada parcial de 1.a ordem, em relação à $\underline{x}$, no ponto $\underline{(x_o\,,y_o)}$ e*
$$\frac{\partial(c \cdot f)}{\partial x}(x_o\,,y_o) = c\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_o\,,y_o)\,.$$
- *a função $\underline{f \cdot g}$ admitirá derivada parcial de 1.a ordem, em relação à $\underline{x}$, no ponto $\underline{(x_o\,,y_o)}$ e*

$$\frac{\partial(f \cdot g)}{\partial x}(x_o\,,y_o) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_o\,,y_o)\,g(x_o\,,y_o) + f(x_o\,,y_o)\,\frac{\partial g}{\partial x}(x_o\,,y_o)$$

continuando...

Proposição

- se $g(x_o\,,y_o) \neq 0$, a função $\dfrac{f}{\underline{g}}$ admitirá derivada parcial de 1.a ordem, em relação à $\underline{x}$, no ponto $\underline{(x_o\,,y_o)}$ e

$$\frac{\partial\left(\dfrac{f}{g}\right)}{\partial x}(x_o\,,y_o) = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_o\,,y_o)\,g(x_o\,,y_o) - f(x_o\,,y_o)\,\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_o\,,y_o)}{g^2(x_o\,,y_o)}\,.$$

Observação

- Vale um resultado análogo à Proposição acima para a derivada parcial de de 1.a ordem, $\underline{\text{em relação à variável } y}$, no ponto $\underline{(x_o\,,y_o)}$.