Derivadas parciais de ordem superior

Definição

Consideremos $A \subseteq \mathbb{R}^2$ *um subconjunto, não vazio, aberto de* $\underline{\mathbb{R}^2}$ *e* $f : A \to \mathbb{R}$ *uma função, que possui derivadas parciais de 1.a ordem, relativamente a* $\underline{x}$ *e a* $\underline{y}$*, em cada ponto do conjunto* $\underline{A}$.

Então, para a função $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} : A \to \mathbb{R}$, *podemos tentar encontrar sua derivada parcial de 1.a ordem, relativamente a* $\underline{x}$*, no ponto* $(x_o\,, y_o) \in A$, *isto é, a derivada parcial da função* $\underline{f_x}$*, relativamente a* $\underline{x}$*, no ponto* $\underline{(x_o\,, y_o)}$.

Caso exista, ela será dita **derivada parcial de segunda ordem da função** $\underline{f}$**, relativamente à variável** $\underline{x}$**, no ponto** $\underline{(x_o\,, y_o)}$ *e será denotada por*

$$f_{xx}(x_o\,, y_o) \quad ou \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_o\,, y_o) \quad ou \quad \partial_x^2 f(x_o\,, y_o)\,,$$

$$\text{ou seja,} \quad f_{xx}(x_o\,, y_o) = (f_x)_x(x_o\,, y_o)$$

Definição

De modo análogo, a derivada parcial da função f_x, relativamente a y, no ponto $(x_o\,,y_o)$, caso exista, será dita **derivada partial de segunda ordem da função f, relativamente às variáveis x e a y, no ponto $(x_o\,,y_o)$** *e denotada por*

$$f_{xy}(x_o\,,y_o) \quad ou \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x_o\,,y_o) \quad ou \quad \partial^2_{yx} f(x_o\,,y_o)\,,$$

$$ou\ seja,\quad f_{xy}(x_o\,,y_o) = (f_x)_y(x_o\,,y_o)\,.$$

Definição

Definimos **derivada partial de segunda ordem da função f, relativamente à variável y, no ponto $(x_o\,,y_o)$** *(se existir), denotada por*

$$f_{yy}(x_o\,,y_o) \quad ou \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_o\,,y_o) \quad ou \quad \partial^2_{y} f(x_o\,,y_o)\,,$$

$$ou\ seja,\quad f_{yy}(x_o,y_o) = (f_y)_y(x_o,y_o)\,.$$

Definição

De modo análogo, a derivada parcial da função $\underline{f_y}$*, relativamente a* $\underline{x}$*, no ponto* $\underline{(x_o\,,y_o)}$*, caso exista, será dita* **derivada partial de segunda ordem da função** $\underline{f}$**, relativamente às variáveis** $\underline{y}$ **e a** $\underline{x}$**, no ponto** $\underline{(x_o\,,y_o)}$ *e denotada por*

$$f_{yx}(x_o\,,y_o) \quad ou \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_o\,,y_o) \quad ou \quad \partial^2_{xy} f(x_o\,,y_o)\,,$$

$$ou\ seja, \quad f_{yx}(x_o\,,y_o) = (f_y)_x(x_o\,,y_o)\,.$$

Observação

A ordem em que aparecem nas várias derivadas parciais na Definição acima é importante. Veremos, em um exemplo mais a frente, que pode ocorrer: $f_{yx}(x_o\,,y_o) \neq f_{xy}(x_o\,,y_o)$.

Para que **não** *ocorra confusão basta lembrar, por exemplo, que*

$$f_{yx}(x\,,y) = (f_y)_x(x\,,y)\,.$$

Observação

Podemos, definir as **derivadas parciais de terceira ordem da função f no ponto $(x_o\,,y_o)$**, *por exemplo:*

$$\underbrace{f_{xxx}(x_o\,,y_o)}_{=(f_{xx})_x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_o\,,y_o) \doteq \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)(x_o\,,y_o)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f_{xx}(x_o+h\,,y_o) - f_{xx}(x_o\,,y_o)}{h}\,,$$

$$\underbrace{f_{yxx}}_{=(f_{yx})_x}(x_o\,,y_o) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}(x_o\,,y_o) \doteq \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)(x_o\,,y_o)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f_{yx}(x_o+h\,,y_o) - f_{yx}(x_o\,,y_o)}{h}$$

e analogamente, podemos obter as outras derivadas parciais de 3.a ordem.

Observação

de modo semelhante podemos definir as derivadas parciais de ordem maior ou igual a quatro, em relação a $\underline{x}$ e em relação a $\underline{y}$, da função $\underline{f}$ ponto $\underline{(x_o\,,y_o)}$.

Definição

Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^n$ não vazio, aberto em $\underline{\mathbb{R}^n}$, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função e $k \in \mathbb{N}$ fixado.
Diremos que a função $\underline{f}$ é de **classe $\underline{C^k}$ em $\underline{A}$** *se a função $\underline{f}$ e cada uma das suas derivadas parciais até a ordem $\underline{k}$, existirem e forem funções contínuas no conjunto $\underline{A}$.*
Neste caso escreveremos: $f \in C^k(A\,;\,\mathbb{R})$.
Diremos que a função $\underline{f}$ é de **classe $\underline{C^\infty}$ em $\underline{A}$** *se a função $\underline{f}$ é de classe $\underline{C^k}$ em $\underline{A}$, para todo $k \in \mathbb{N}$.*
Neste caso escreveremos: $f \in C^\infty(A\,;\,\mathbb{R})$.

Exemplo

A função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$f(x\,,y) \doteq x\,y\,, \quad para \quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,, \tag{1}$$

então $f \in C^\infty\left(\mathbb{R}^2\,;\,\mathbb{R}\right)$.

Resolução: temos:

$$f_x(x\,,y) \overset{(1)}{=} \frac{\partial}{\partial x}[x\,y] = y\,, \tag{2}$$

$$f_y(x\,,y) \overset{(1)}{=} \frac{\partial}{\partial y}[x\,y] = x\,, \tag{3}$$

$$f_{xx}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\right] \overset{(2)}{=} \frac{\partial}{\partial x}[y] = 0\,, \tag{4}$$

$$f_{yy}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y)\right] \overset{(3)}{=} \frac{\partial}{\partial x}[x] = 0\,, \tag{5}$$

$$f_{xy}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\right] \overset{(2)}{=} \frac{\partial}{\partial y}[y] = 1\,, \tag{6}$$

$$f_{yx}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y)\right] \overset{(3)}{=} \frac{\partial}{\partial x}[x] = 1\,, \tag{7}$$

$$f_{xxx}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x\,,y)\right] \overset{(4)}{=} 0\,, \tag{8}$$

de modo análogo, pode-se mostrar que:

$$f_{xxy}(x\,,y) = f_{xyy}(x\,,y) = f_{yyy}(x\,,y) = f_{yxy}(x\,,y) = f_{yxx}(x\,,y)$$
$$= f_{xyx}(x\,,y) = f_{yyx}(x\,,y) = 0\,,$$

para cada $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$.
De modo semelhante, teremos que todas as demais derivadas parciais de ordem maior ou igual a quatro, são nulas em $\underline{\mathbb{R}^2}$, logo todas serão funções contínuas em $\mathbb{R}^2$, ou seja, $f \in C^\infty\left(\mathbb{R}^2\,;\mathbb{R}\right)$.

$\square$

Observação

- *Como consequência de vários resultado anteriores, uma função polinomial de n-variáveis é de classe $\underline{C^\infty}$ em $\underline{\mathbb{R}^n}$.*
- *Além disso se o polinômio que define a função polinomial tem grau*

$$n_o \in \mathbb{N}\,,$$

então todas as derivadas parciais da função polinomial, de ordem maior ou igual a

$$n_o + 1\,,$$

serão iguais a zero, em todo $\underline{\mathbb{R}^n}$.
- *Como consequência, temos que uma função racional de n-variáveis é de classe $\underline{C^\infty}$, no seu respectivo domínio.*

Em particular, como consequência da Observação acima temos o:

Exercício

Mostre que função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$f(x\,,y\,,z) \doteq 1 + x - 2\,y + 3\,x^2 + 4\,x^2\,y^3\,, \quad para \quad (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3,$$

satisfaz $f \in C^\infty\left(\mathbb{R}^3\,;\,\mathbb{R}\right)$.

Temos também o:

Exemplo

Mostre que a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$f(x\,,y) \doteq x\,\mathrm{sen}(y) + y^2\,\cos(x)\,, \quad para \quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2 \tag{9}$$

satisfaz $f \in C^\infty\left(\mathbb{R}^2\,;\,\mathbb{R}\right)$.

Resolução: para cada $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, temos:

$$f_x(x\,,y) \overset{(9)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left\{x\,\mathrm{sen}(y) + y^2\,\cos(x)\right\} = 1\cdot\mathrm{sen}(y) + y^2\,[-\mathrm{sen}(x)]$$

$$= \mathrm{sen}(y) - y^2\,\mathrm{sen}(x) \tag{10}$$

$$f_y(x\,,y) \overset{(9)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left\{x\,\mathrm{sen}(y) + y^2\,\cos(x)\right\}$$

$$= x\,\cos(y) + 2\,y\,\cos(x)\,, \tag{11}$$

$$f_{xx}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\right] \overset{(10)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left\{\mathrm{sen}(y) - y^2\,\mathrm{sen}(x)\right\}$$

$$= y^2\,\cos(x)\,,$$

$$f_{xy}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\right] \overset{(10)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left[\mathrm{sen}(y) - y^2\,\mathrm{sen}(x)\right]$$

$$= \cos(y) - 2\,y\,\mathrm{sen}(x)\,, \tag{12}$$

$$
\begin{aligned}
f_{yx}(x\,,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y)\right] \overset{(11)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left[x\,\cos(y) + 2\,y\,\cos(x)\right] \\
&= 1\cdot\cos(y) + 2\,y\,[-\operatorname{sen}(x)] = \cos(y) - 2\,y\,\operatorname{sen}(x)\,, \qquad (13) \\
f_{yy}(x\,,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y)\right] \overset{(11)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left[x\,\cos(y) + 2\,y\,\cos(x)\right] \\
&= x\,[-\operatorname{sen}(y)] + 2\,\cos(x) = -x\,\operatorname{sen}(y) + 2\,\cos(x)\,.
\end{aligned}
$$

e assim por diante..
Notemos que todas as funções acima, juntamente com a função $\underline{f}$, são funções contínuas em $\mathbb{R}^2$, ou seja, $f \in C^\infty\left(\mathbb{R}^2\,;\,\mathbb{R}\right)$,

$\square$

Observação

- *Vimos no Exemplo acima, para cada* $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$*, temos:*
$$f_{xy}(x\,,y) \stackrel{(12)}{=} \cos(y) - 2\,y\,\operatorname{sen}(x) \stackrel{(13)}{=} f_{yx}(x\,,y)\,,$$
- *Infelizmente, isso* **NÃO** *ocorre sempre, como mostrará um Exemplo no final desta seção de slides.*
A pergunta que temos é a seguinte: sob que condições sobre a função f, teremos a identidade acima?

Para responder a esta questão temos o:

Teorema

(**de Schwarz**) *Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^2$ não vazio e aberto em $\mathbb{R}^2$ e $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função. Suponhamos que a função f é tal que as funções f_{xy} e f_{yx}, existem e sejam funções contínuas no conjunto A. Então, para cada $(x\,,y) \in A$, temos:*
$$f_{xy}(x\,,y) = f_{yx}(x\,,y)\,. \tag{14}$$

Observação

- *O Teorema acima, nos dá* **condições suficientes***, para que possamos trocar a ordem das derivadas parciais de segunda ordem de uma função, sem alterar o valor das mesmas.*
- *Vale o análogo do Teorema acima para funções a valores reais, de n-variáveis reais.*
- *O Exemplo abaixo mostra que, em geral, quando trocamos a ordem das derivadas parciais, o resultado pode ser diferente. Veja as notas para a resolução.*

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x,y) \doteq \begin{cases} \frac{x\,y^3}{x^2+y^2}\,, & \text{para } (x\,,y) \neq (0\,,0) \\ 0\,, & \text{para } (x\,,y) = (0\,,0) \end{cases}.$$

Então $f \in C^1\left(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}\right)$, *mas* $f \notin C^2\left(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}\right)$ *e*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0\,,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0\,,0)\,.$$