Regra da cadeia

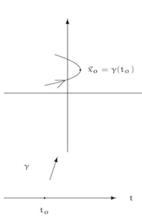
Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto não vazio, de $\underline{\mathbb{R}^2}$, $f : A \to \mathbb{R}$ uma função, $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ curva parametrizada dada por

$$\gamma(t) \doteq (x(t)\,,y(t))\,, \text{ para cada } \; t \in I\,, \tag{1}$$

com $\gamma(t) \in A$, para $t \in I$, onde $\underline{I}$ é um intervalo aberto de $\underline{\mathbb{R}}$.
Mostraremos que se as funções $\underline{f}$, seja contínua com derivadas parciais de 1.a ordem contínuas em $\vec{x}_o \doteq \gamma(t_o)$, e $\underline{\gamma}$ é diferenciável em e $t_o \in I$, respectivamente, então a função composta $F \doteq f \circ \gamma$,

$$F(t) \doteq f[\gamma(t)] = f[(x(t)\,,y(t))]\,, \quad \text{para} \;\; t \in I\,, \tag{2}$$

também será diferenciável em $\underline{t_o}$ (figura abaixo).
Além disso, encontraremos uma expressão para a derivada $\underline{F'(t_o)}$



Teorema

*(**Regra da cadeia**) Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto e não vazio, em $\underline{\mathbb{R}^2}$, $f : A \to \mathbb{R}$ função e $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ curva parametrizada, de modo que $\gamma(t) \in A$, para cada $t \in I$.*
Suponhamos a curva parametrizada $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ seja diferenciável em $\underline{t_o}$ e a função $\underline{f}$ seja contínua, com derivadas parciais de 1.a ordem contínuas em $\vec{x}_o \doteq \gamma(t_o)$. Então a função $F : I \to \mathbb{R}$, definida por

$$F(t) \doteq [f \circ \gamma](t)\,, \quad \textit{para cada} \quad t \in I\,, \tag{3}$$

será diferenciável em $\underline{t_o}$ e:

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(t_o) \overset{(3)}{=} F'(t_o) = (f_x(\vec{x}_o))\,, f_y(\vec{x}_o)) \bullet \gamma'(t_o)$$
$$\overset{\vec{x}_o \doteq \gamma(t_o)}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x}[\gamma(t_o)]\,, \frac{\partial f}{\partial y}[\gamma(t_o)] \right) \bullet \gamma'(t_o)\,. \tag{4}$$

Observação

Se a curva parametrizada $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, *é dada por*

$$\gamma(t) = (x(t)\,, y(t))\,, \quad para \qquad t \in I$$

é uma curva parametrizada diferenciável em $\underline{t_o}$,

$$\gamma(t_o) = (x_o\,, y_o) \;\; e \;\; \gamma'(t_o) = \left(\frac{dx}{dt}(t_o)\,, \frac{dy}{dt}(t_o)\right)\,,$$

poderemos reescrever (4), *da seguinte forma:*

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(t_o) \overset{(4)}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)\,, \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)\right) \bullet \left(\frac{dx}{dt}(t_o)\,, \frac{dy}{dt}(t_o)\right)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)\,\frac{dx}{dt}(t_o) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)\,\frac{dy}{dt}(t_o)\,, \tag{5}$$

ou, omitindo os pontos $\underline{(x_o\,, y_o)}$ *e* $\underline{t_o}$, *escreveremos:*

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt} = \frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{dy}{dt}\,, \tag{6}$$

onde a função $F : I \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$F(t) \doteq f[x(t)\,, y(t)]\,, \quad para \quad t \in I\,.$$

Observação

Temos um análogo ao Teorema acima para funções de <u>*n*</u> *variáveis reais e curvas parametrizadas em* <u>$\mathbb{R}^n$</u>*, isto é, para uma função*

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

e uma curva parametrizada $\gamma : I \to A \subseteq \mathbb{R}^n$*, onde satisfazendo condições análogas às do Teorema acima teremos que a função* $F \doteq f \circ \gamma$*, então*

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(t_o) = F'(t_o) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_o)\, \frac{dx_i}{dt}(t_o)\,, \qquad (7)$$

onde $\gamma : I \to A \subseteq \mathbb{R}^n$*, é dada por*

$$\gamma(t) \doteq (x_1(t)\,, \cdots, x_n(t))\,, \quad \textit{para} \quad t \in I\,,$$

$$\textit{satisfazendo:} \qquad \vec{x}_o = \gamma(t_o)\,.$$

Exemplo

Consideremos a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$f(x\,,y) \doteq x^2\,y\,,\ \textit{para cada}\ \ (x\,,y) \in \mathbb{R}^2 \tag{8}$$

e a curva parametrizada $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, *dada por*

$$\gamma(t) \doteq \left(e^{t^2}\,,2\,t+1\right)\ ,\ \textit{para cada}\ \ t \in \mathbb{R}\,. \tag{9}$$

Verifique que a função $F \doteq f \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é diferenciável em* $\mathbb{R}$ *e calcule* $\dfrac{dF}{dt}(t)$, *para cada* $t \in \mathbb{R}$.

Resolução: notemos que

$$f_x(x\,,y) \overset{(8)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left[x^2\,y\right] = 2\,x\,y\,, \tag{10}$$

$$f_y(x\,,y) \overset{(8)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left[x^2\,y\right] = x^2\,,\quad \text{para}\ \ (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,. \tag{11}$$

$$\text{e}\ \ \gamma(t) = (x(t)\,,y(t)) = \left(e^{t^2}\,,2\,t+1\right)\ ,\quad \text{para}\ \ t \in \mathbb{R}\,, \tag{12}$$

$$\text{então: } \gamma'(t) = (x'(t)\,,y'(t)) \overset{(12)}{=} \left(2\,t\,e^{t^2}\,,2\right)\ ,\ \text{para } t \in \mathbb{R}\,. \tag{13}$$

Logo, as derivadas parciais de 1.a ordem de f são contínuas em $\mathbb{R}^2$ e assim, da regra da cadeia, para $t \in \mathbb{R}$, segue que:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\,F}{dt}(t) = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(t) &\overset{(4)}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x}[\gamma(t)]\,,\frac{\partial f}{\partial y}[\gamma(t)]\right) \bullet \gamma\,'(t) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}[x(t)\,,y(t)]\,,\frac{\partial f}{\partial y}[x(t)\,,y(t)]\right) \bullet (x\,'(t)\,,y\,'(t)) \\
&\overset{(11)\text{ e }(13)}{=} \left(2\,x(t)\,y(t)\,,[x(t)]^2\right) \bullet \left(2\,t\,e^{t^2}\,,2\right) \\
&\underset{x(t)\overset{(12)}{=}e^{t^2},\,y(t)\overset{(12)}{=}2\,t+1}{=} \left(2\,e^{t^2}\,(2\,t+1)\,,e^{2t^2}\right) \bullet \left(2\,t\,e^{t^2}\,,2\right) \\
&= 2\,e^{2\,t^2}\left(4\,t^2+2\,t+2\right)\,, \quad \text{para} \quad t \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}
$$

$\square$

Nas notas de aula resolvemos o:

Exercício

Consideremos a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x\,,y) \doteq x^2 - y^2\,, \quad para \quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2$$

e a curva parametrizada $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, dada por

$$\gamma(t) = (x(t)\,,y(t)) \doteq \left(t\,,t^3\right)\,, \quad para \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Mostre que a função $F \doteq (f \circ \gamma) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $\underline{\mathbb{R}}$ e calcule $\dfrac{dF}{dt}(t)$, para cada $t \in \mathbb{R}$.

Observação

Seja $A \subseteq \mathbb{R}^2$ *um subconjunto aberto não vazio e* $(x_o\,, y_o) \in A$. *Suponhamos que a função* $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ *seja contínua, com derivadas parciais contínuas em* $\vec{x}_o \doteq (x_o, y_o) \in A$, *e que a função* $y : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *seja diferenciável em* $x_o \in I$, *de modo que* $(x\,, y(x)) \in A$, *para* $x \in I$, *com* $y(x_o) = y_o$.
Logo se considerarmos a curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^2$ *dada por*

$$\gamma(x) \doteq (x\,, y(x))\,, \quad \text{para} \quad x \in I\,, \tag{14}$$

temos que a curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^2$ *será diferenciável em* $\underline{x_o}$ *e* $\gamma(I) \subseteq A$.

continuando...

Observação

Logo, da regra da cadeia, a função $F = (f \circ \gamma) : I \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$F(x) \doteq (f \circ \gamma)(x) \overset{(14)}{=} f(x\,,y(x))\,, \quad para \quad x \in I\,, \tag{15}$$

será diferenciável em $\underline{x_o}$ *e*

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx}(x_o) &\overset{(4)}{=} \frac{\partial f}{\partial x}[\gamma(x_o)]\,\frac{dx}{dx}(x_o) + \frac{\partial f}{\partial y}[\gamma(x_o)]\,\frac{dy}{dx}(x_o) \\ &\overset{(14)}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x_o\,,y_o)\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_o\,,y_o)\,\frac{dy}{dx}(x_o) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_o\,,y_o) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_o\,,y_o)\,y'(x_o)\,. \end{aligned} \tag{16}$$

Observação

Notemos que, na situação acima, o traço da curva parametrizada $\gamma : I \to A \subseteq \mathbb{R}^2$ *coincide com o gráfico de uma função da variável* $\underline{x}$*, a saber, será o gráfico da função* $y = y(x)$*, para* $x \in I$*.*

A figura abaixo ilustra a situação acima.