Vetor gradiente

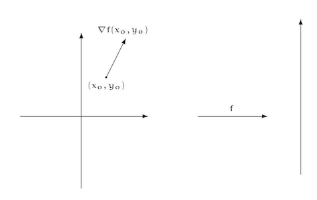
Definição

Sejam $\underline{A}$ um subconjunto aberto, não vazio, em $\underline{\mathbb{R}^2}$, $(x_o\,,y_o) \in A$ e $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, uma função que tem derivadas parciais de 1.a ordem no ponto $\underline{(x_o\,,y_o)}$. Definimos o **vetor gradiente da função** $\underline{f}$ **no ponto** $\underline{(x_o\,,y_o)}$, *indicado por $\underline{\nabla f(x_o\,,y_o)}$, como sendo o vetor*

$$\nabla f(x_o\,,y_o) \doteq (f_x(x_o\,,y_o)\,, f_y(x_o\,,y_o))\,. \qquad (1)$$

Observação

Geometricamente, o vetor gradiente da função $\underline{f}$ em $\underline{(x_o\,,y_o)}$ pode ser visto como um vetor associado ao ponto $\underline{(x_o, y_o)}$.



Observação

Se a função $f : A \overset{aberto}{\subseteq} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *tem todas as derivadas parciais de 1.a ordem no ponto* $\vec{x}_o \in A$*, definiremos o* **vetor gradiente da função f no ponto $\vec{x}_o$**, *indicado por* $\nabla f\,(\vec{x}_o)$*, como sendo o vetor de* $\mathbb{R}^n$ *dado por:*

$$\begin{aligned} \nabla f(\vec{x}_o) &\doteq \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_o) \,, \cdots \,, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_o) \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_o) \cdot \vec{e}_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_o) \cdot \vec{e}_n \,. \end{aligned} \tag{2}$$

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *a função, dada por*

$$f(x\,,y) \doteq x^2 + y^2 \,, \quad para \quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2 \,. \tag{3}$$

Calcule, se existir, $\nabla f(1\,,1)$ *e represente-o geometricamente.*

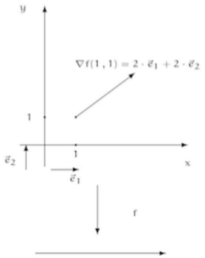
Resolução: notemos que a função $f \in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^2\right)$. Como

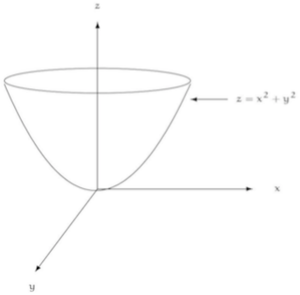
$$f_x(x\,,y) \overset{(3)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left[x^2+y^2\right] = 2\,x\,, \tag{4}$$

$$f_y(x\,,y) \overset{(3)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left[x^2+y^2\right] \overset{(3)}{=} 2\,y\,, \quad \text{para} \quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,, \tag{5}$$

temos: $\nabla f(1\,,1) = (f_x(1\,,1)\,,f_y(1,1)) \overset{(4)}{=} (2\,,2) = 2\cdot\vec{e}_1 + 2\cdot\vec{e}_2\,.$

A figura abaixo à esquerda, nos dá uma representação geométrica do vetor $\nabla f(1\,,1)$.





Exemplo

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$f(x\,,y) \doteq x^2 - y^2\,,\ \textit{para cada}\ \ (x\,,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{6}$$

Encontre o vetor gradiente $\nabla f(x\,,y)$*, para* $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$.

Resolução:

Para cada $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, teremos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y) \overset{(6)}{=} \frac{\partial f}{\partial x}\left[x^2 - y^2\right] = 2\,x\,, \tag{7}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y) \overset{(6)}{=} \frac{\partial f}{\partial y}\left[x^2 - y^2\right] = -2\,y\,, \tag{8}$$

$$\text{logo}\quad \nabla f(x\,,y) \overset{(1)}{=} f_x(x\,,y)\cdot\vec{e}_1 + f_y(x\,,y)\cdot\vec{e}_2$$

$$\overset{(7),(8)}{=} 2\,x\cdot\vec{e}_1 - 2\,y\cdot\vec{e}_2\,. \tag{9}$$

Observação

no Exemplo acima temos, em particular, o vetor

$$\nabla f(1,0) \overset{(9),\ com\ x \doteq 1\ e\ y \doteq 0}{=} 2 \cdot \vec{e}_1 = (2,0) \tag{10}$$

é ortogonal à curva de nível da função $\underline{f}$ *que passa pelo ponto* $\underline{(1,0)}$*, isto é, é ortogonal a curva*

$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \overbrace{f(x,y)}^{\overset{(6)}{=} x^2 - y^2} = \overbrace{f(1,0)}^{\overset{(6),\ com\ x \doteq 1\ e\ y \doteq 0}{=} 1} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 - y^2 = 1 \right\}.$$

continuando...

Observação

De fato, uma parametrização da curva de nível acima pode ser dada por $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, *onde*

$$\gamma(t) \doteq \left(\sqrt{1+t^2}\,,\, t\right)\,, \quad para \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{11}$$

Logo, $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *é uma curva parametrizada diferenciável e o vetor tangente à mesma em* $\underline{t}$ *será dada por:*

$$\gamma\,'(t) \overset{(11)}{=} \left(\frac{1}{2}\frac{2\,t}{\sqrt{1+t^2}}\,,\,1\right)\,, \quad para \quad t \in \mathbb{R}\,, \tag{12}$$

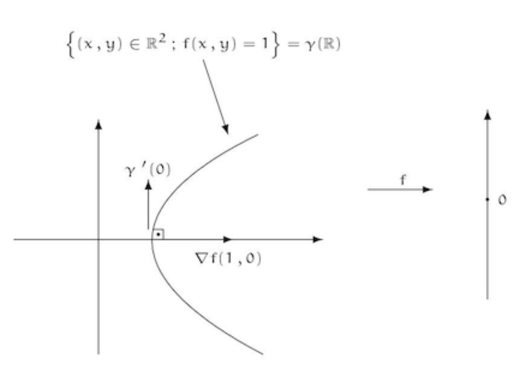
$$assim: \quad \gamma(0) \overset{(11)\,,com\ t=0}{=} (1\,,0)\ e\ \gamma\,'(0) \overset{(12)\,,com\ t=0}{=} (0\,,1)\,. \tag{13}$$

$$Portanto \quad \nabla f(1\,,0) \bullet \gamma\,'(0) \overset{(10)\ e\ (13)}{=} (2\,,0) \bullet (0\,,1) = 0$$

mostrando que os vetores $\nabla f(1\,,0)$ *e* $\gamma\,'(0)$ *são ortogonais.*

Observação

Notemos que o ponto $\gamma(0) = (1\,,0)$ *é um ponto da curva de nível* $\underline{c = 1}$*, associada a função* $\underline{f}$*.*
Na figura abaixo, temos a representação geométrica da curva de nível $c = 1$*, bem como os vetores* $\underline{\gamma'(0)}$ *e* $\underline{\nabla f(1\,,0)}$*.*

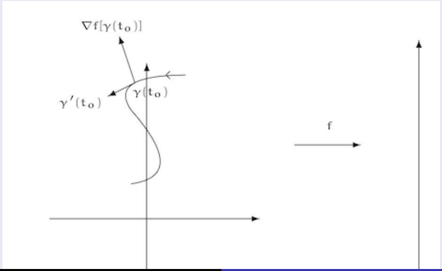


O ocorreu no Exemplo acima é geral, a saber:

Proposição

Seja $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função contínua, com derivadas parciais de 1.a ordem contínuas em* $(x_o\,,y_o) \in A$ *, onde* A *é um subconjunto aberto, não vazio, de* $\underline{\mathbb{R}^2}$ *e* $\nabla f(x_o\,,y_o) \neq (0\,,0)$ *.*
Então o vetor gradiente $\underline{\nabla f(x_o\,,y_o)}$ *é um vetor ortogonal à curva de nível da função* $\underline{f}$ *que contém o ponto* $\underline{(x_o\,,y_o)}$*, ou seja, se a curva de nível acima possuir uma parametrização regular dada por* $\gamma : I \doteq (t_o - \delta, t_o + \delta) \to \mathbb{R}^2$*, de modo que* $\gamma(t_o) = (x_o\,,y_o)$*, teremos:*

$$\nabla f[\gamma(t_o)] \bullet \gamma'(t_o) = 0\,. \tag{14}$$



Exemplo

Encontrar uma equação vetorial da reta normal à curva que é a representação geométrica do gráfico da função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$y = g(x) \doteq x + \operatorname{sen}(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{15}$$

que contém o ponto $\vec{x}_o \doteq \left(\frac{\pi}{2}\,, \frac{\pi}{2} + 1\right)$.

Resolução: consideremos a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x\,, y) \doteq x + \operatorname{sen}(x) - y\,, \quad \text{para} \quad (x\,, y) \in \mathbb{R}^2\,, \tag{16}$$

$$\text{logo} : \; f_x(x\,, y) \overset{(16)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left[x + \operatorname{sen}(x) - y\right] = 1 + \cos(x)\,, \tag{17}$$

$$f_y(x\,, y) \overset{(16)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left[x + \operatorname{sen}(x) - y\right] = -1\,. \tag{18}$$

para $(x\,, y) \in \mathbb{R}^2$.
Observemos que a função $\underline{f}$ é contínua com derivadas parciais contínuas em $\underline{\mathbb{R}^2}$.

Notemos que a curva de nível zero, associada à função $\underline{f}$, é a curva dada pela representação geométrica do gráfico da função $\underline{g}$, pois

$$\overbrace{\{(x\,,y)\in\mathbb{R}^2; f(x\,,y)=0\}}^{\text{curva de nível zero associada à função } \underline{f}} \overset{(16)}{=} \{(x\,,y)\in\mathbb{R}^2; x+\operatorname{sen}(x)-y=0\}$$

$$= \left\{(x\,,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ y=\underbrace{x+\operatorname{sen}(x)}_{\overset{(15)}{=}g(x)}\right\} = \{(x\,,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ y=g(x)\}$$

$$= \underbrace{\{(x\,,g(x))\in\mathbb{R}^2; x\in\mathbb{R}\}}_{\text{gráfico da função } \underline{g}} \qquad (19)$$

Observemos também que a curva cujo traço é dada por (19), pode ser obtida como o traço da função vetorial $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, dada por

$$\gamma(t)=(x(t)\,,y(t))\doteq(t\,,t+\operatorname{sen}(t))\,,\quad \text{para}\quad t\in\mathbb{R}\,. \qquad (20)$$

Notemos que $\gamma \in C^{\infty}(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R}^2)$ e, para $t \in \mathbb{R}$,

$$\gamma'(t) = (x'(t)\,,y'(t)) \overset{(17)\text{ e }(18)}{=} (1\,,1+\cos(t)) \neq (0\,,0)\,.$$

Para $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, temos:

$$\nabla f(x\,,y) \overset{(1)}{=} (f_x(x\,,y)\,,f_y(x\,,y)) \overset{(16)}{=} (1+\cos(x)\,,-1)\,. \qquad (21)$$

Logo, da Proposição acima, segue que o vetor

$$\nabla f\left(\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}+1\right) \overset{(21)\,,\ \text{com}\ x \doteq \frac{\pi}{2}\,, y \doteq \frac{\pi}{2}+1}{=} (1\,,-1)\,, \qquad (22)$$

será um vetor normal à curva parametrizada regular $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, no instante $t \doteq \dfrac{\pi}{2}$.

Portanto uma equação vetorial da reta que é normal a representação geométrica do gráfico da função $\underline{g}$, no ponto

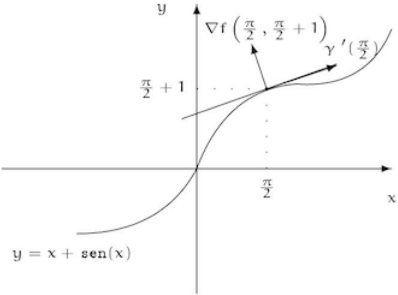
$$\vec{x}_o \doteq \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 1\right), \tag{23}$$

será dada por: $X = \vec{x}_o + t \cdot \nabla f(\vec{x}_o)$, para $t \in \mathbb{R}$

que, de (23) e (22), é equivalente à:

$$(x, y) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 1\right) + t \cdot (1, -1), \quad \text{para} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Geometricamente, temos a seguinte situação:



Exemplo

Consideremos a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x\,,y) \doteq x\,y + 1\,, \quad para \ \ (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,. \tag{24}$$

1. *Represente, geometricamente, as curvas de nível zero, de nível* $\underline{1}$ *e de nível* $\underline{2}$, *associadas a função* $\underline{f}$, *em alguns pontos de* $\underline{\mathbb{R}^2}$;
2. *Represente, geometricamente, alguns vetores gradientes da função* $\underline{f}$;

Resolução:

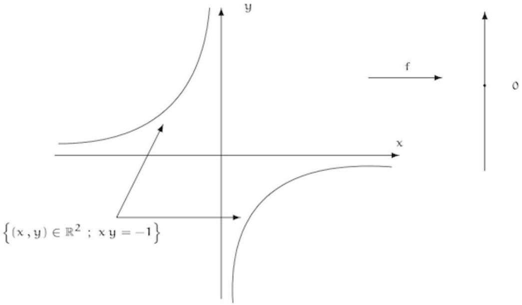
De 1.:

- Curva de nível zero, associada à função $\underline{f}$:

$$\left\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ f(x\,,y) = 0\right\} \overset{(24)}{=} \left\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x\,y + 1 = 0\right\}$$

$= \left\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x\,y = -1\right\}$, ou seja, uma hipérbole no plano.

Temos a seguinte representação geométrica:



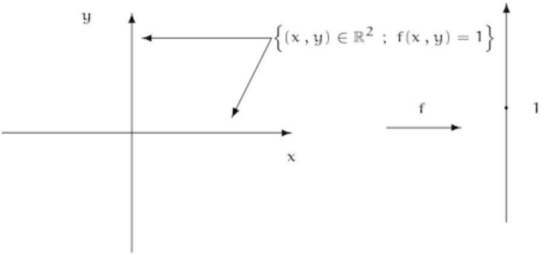
- Curva de nível $\underline{1}$, associada à função $\underline{f}$:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = 1\} \stackrel{(24)}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \; x y + 1 = 1\}$$
$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \; x y = 0\} ,$$

ou seja, as retas $x = 0$ e $y = 0$,

ou ainda, os eixos coordenados do plano xOy.

Temos a seguinte representação geométrica:

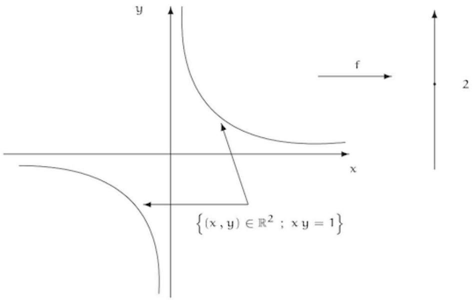


- Curva de nível $\underline{2}$, associada à função $\underline{f}$:

$$\left\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\; f(x\,,y) = 2\right\} \overset{(24)}{=} \left\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\; x\,y + 1 = 2\right\}$$
$$= \left\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\; x\,y = 1\right\}\,,$$

ou seja, uma hipérbole no plano xOy.

Temos a seguinte representação geométrica:



De 2. :

Em cada ponto $\underline{(x\,,y)}$ onde $\nabla f(x\,,y) \neq \vec{O}$, teremos o vetor gradiente $\nabla f(x\,,y)$, deverá ser normal à curva de nível associada à função $\underline{f}$, que contém o ponto $\underline{(x\,,y)}$, no ponto $\underline{(x\,,y)}$.

O problema é saber o sentido que ele aponta: "para dentro" da curva de nível ou "para fora" da mesma.

Veremos mais a frente que eles devem apontar no sentido de "maior crescimento" da função $\underline{f}$.
Baseado nestas informações temos a seguinte figura associada à função $\underline{f}$ e seus respectivos vetores gradientes: