Derivada direcional

Definição

Consideremos $\underline{A}$ um subconjunto aberto, não vazio, do $\underline{\mathbb{R}^n}$, $\underline{P_o \in A}$, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função e $\underline{\vec{v} \in \mathbb{R}^n}$ um vetor unitário, isto é, $\|\vec{v}\| = 1$.

Definimos a **<u>derivada direcional da função $\underline{f}$ no ponto $\underline{P_o}$, na direção de $\underline{\vec{v}}$</u>**, *como sendo o limite*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f\,(P_o + t \cdot \vec{v}) - f(P_o)}{t}\,, \tag{1}$$

quando este limite existir.

Notação

Notações para a derivada direcional de $\underline{f}$ no ponto $\underline{P_o}$, na direção do vetor unitário $\underline{\vec{v}}$ são:

$$\partial_{\vec{v}} f(P_o)\,, \quad ou \quad f_{\vec{v}}(P_o)\,, \quad ou \quad D_{\vec{v}} f(P_o)\,. \tag{2}$$

Observação

Se existir, podemos interpretar, geometricamente, a derivada direcional da função $\underline{f}$ no ponto $\underline{P_o}$, na direção do vetor unitário $\underline{\vec{v}}$, isto é, o número real $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_o)$, *como sendo o coeficiente angular da reta tangente à representação geométrica do gráfico da função a valores reais, de uma variável real,* $g : I \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$g(t) \doteq f\left(P_o + t \cdot \vec{v}\right), \quad para \quad t \in I, \tag{3}$$

onde $\underline{I}$ é uma intervalo aberto de $\underline{\mathbb{R}}$ contendo $\underline{t = 0}$.

$$\textit{Logo:} \quad f_{\vec{v}}(P_o) \overset{(1)}{=} \lim_{t \to 0} \frac{f(P_o + t \cdot \vec{v}) - f(P_o)}{t}$$

$$\overset{(3)}{=} \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} \overset{\textit{Cálculo 1}}{=} g\,'(0),$$

$$\textit{ou seja,} \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_o) = g\,'(0). \tag{4}$$

Observação

Consideremos a função $f : A \to \mathbb{R}$, *definida no conjunto* $\underline{A}$, *um subconjunto aberto, não vazio, de* $\underline{\mathbb{R}^2}$, $P_o \doteq (x_o\,, y_o) \in A$ *e os vetores unitários* $\vec{e}_1 \doteq (1\,,0)$ *e* $\vec{e}_2 \doteq (0\,,1)$.
Neste caso teremos (se existirem):

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}_1}(P_o) = \lim_{t\to 0} \frac{f(P_o + t\cdot\vec{e}_1) - f(P_o)}{t} \overset{P_o+t\cdot\vec{e}_1=(x_o+t\,,y_o)}{=} \lim_{t\to 0} \frac{f(x_o+t\,,y_o) - f(x_o\,,y_o)}{t} \; \frac{\partial f}{\partial x}(x_o\,,y_o) \tag{5}$$

$$\text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{e}_2}(P_o) = \frac{f(P_o + t\cdot\vec{e}_2) - f(P_o)}{t} \overset{P_o+t\cdot\vec{e}_2=(x_o\,,y_o+t)}{=} \lim_{t\to 0} \frac{f(x_o\,,y_o+t) - f(x_o\,,y_o)}{t} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_o\,,y_o)\,. \tag{6}$$

Observação

- Em geral, se $\underline{A}$ é um subconjunto aberto, não vazio, de $\underline{\mathbb{R}^n}$, $P_o \in A$, e a função $f : A \to \mathbb{R}$ que é contínua e com derivadas parciais de 1.a ordem contínuas em $\underline{P_o}$ e, para cada $i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$, os vetores unitários
$$\vec{e}_i \doteq (0\,,\cdots\,,0\,,\underbrace{\quad 1 \quad}_{i\text{-ésima posição}}\,,0\,,\cdots\,,0) \in \mathbb{R}^n\,,$$
então
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}_i}(P_o) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_o)\,, \quad \text{para} \quad i \in \{1\,,\cdots\,,n\}\,. \qquad (7)$$

- No caso $\underline{n = 2}$, sejam $P_o \doteq (x_o\,,y_o)$ e $\vec{v} \doteq (a\,,b)$, vetor unitário, a função $g : I \to \mathbb{R}$, dada por
$$g(t) \doteq f(x_o + a\,t\,,\, y_o + b\,t) = f(P_o + t \cdot \vec{v}), \ \text{para } t \in I \qquad (8)$$
e a curva parametrizada diferenciável $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$, dada por
$$\begin{aligned}\gamma(t) &\doteq (x_o + a\,t\,,\, y_o + b\,t\,,\, g(t)) \\ &= (P_o + t \cdot \vec{v}\,,\, g(t)), \ \text{para } t \in I\,, \qquad (9)\end{aligned}$$
onde $\underline{I}$ é um intervalo de $\underline{\mathbb{R}}$, contendo $\underline{t = 0}$, considerado para que as expressões acima façam sentido.

Observação

Como

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= (x_o + a\,t\,,\, y_o + b\,t\,,\, g(t))\\ &= (x_o\,,y_o\,,0) + g(t)\cdot(0\,,0\,,1) + t\cdot(a\,,b\,,0),\ \textit{para } t\in I\,,\end{aligned}$$

temos que o traço da curva parametrizada $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ *estará contido no plano* $\underline{\pi}$, *que tem uma equação vetorial dada por:*

$$\pi : X = (x_o\,,y_o\,,0)+\lambda\cdot(0\,,0\,,1)+\beta\cdot(a\,,b\,,0),\ \textit{para } \lambda,\beta\in\mathbb{R}\,. \quad (10)$$

Para verificar este fato, basta tomar os seguintes valores para os parâmetros do plano: $\lambda = g(t)$ *e* $\beta = t$.

Observemos que o plano $\underline{\pi}$ *é um plano perpendicular ao plano* $\underline{xOy}$, *pois o vetor*

$$(0\,,0\,,1)\times(a\,,b\,,0)\,,$$

diferente do vetor nulo, e normal ao plano $\underline{\pi}$ *e é ortogonal ao vetor* $\underline{(0\,,0\,,1)}$, *que é um vetor normal ao plano* $\underline{xOy}$.

continuando..

Observação

O coeficiente angular da reta tangente a representação geométrica do gráfico da função $\underline{g}$, no ponto $\underline{(0\,,g(0))}$, será dado por:

$$
\begin{aligned}
g\,'(0) &\overset{\text{Cálculo 1}}{=} \lim_{t\to 0}\frac{g(t)-g(0)}{t}\\
&\overset{(8)}{=} \lim_{t\to 0}\frac{f(x_o+a\,t\,,y_o+b\,t)-f(x_o\,,y_o)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{f[(x_o\,,\,y_o)+t\cdot(a\,,b)]-f(x_o\,,y_o)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{f(P_o+t\cdot\vec{v})-f(P_o)}{t}\overset{(1)}{=}\frac{\partial f}{\partial\vec{v}}(P_o)\,. \qquad (11)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, o vetor tangente à curva parametrizada $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$, em $\underline{t=0}$, será dado por:

$$
\begin{aligned}
\gamma\,'(0) &\overset{(9)}{=} (a\,,b\,,g\,'(0)) \overset{(11)}{=} \left(a\,,b\,,\frac{\partial f}{\partial\vec{v}}(P_o)\right)\\
&= (a\,,b\,,0)+\frac{\partial f}{\partial\vec{v}}(P_o)\cdot(0\,,0\,,1)\,, \qquad (12)
\end{aligned}
$$

continuando...

Observação

isto é, o vetor $\underline{\gamma'(0)}$ *é paralelo ao plano* $\underline{\pi}$, *pois um seu vetor diretor, a saber, o vetor* $\underline{(0\,,0\,,1)}$, *é paralelo a um dos vetores diretores do plano* $\underline{\pi}$, *no caso, é coincidente.*

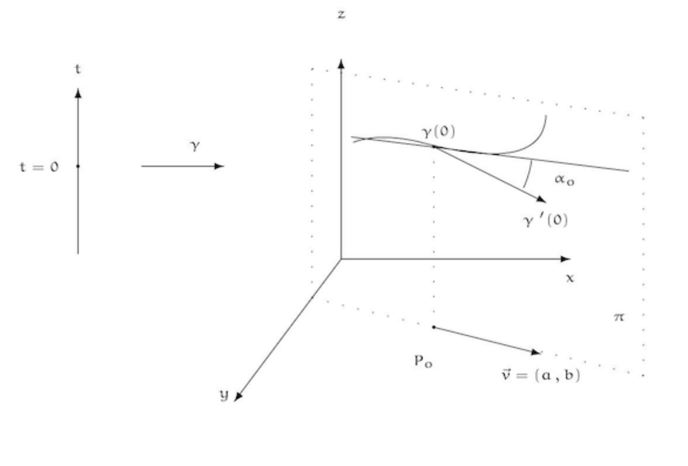
Deste modo podemos identificar o número real $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_o)$, *com o coeficiente angular da reta tangente à representação geométrica do gráfico da curva parametrizada diferenciável* $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$, *que está contida no plano* $\underline{\pi}$, *em* $\underline{t = 0}$.

Mas, como visto no Cálculo 1, sabemos que o coeficiente angular da reta tangente é dado por $\underline{\tan(\alpha_o)}$, *onde* $\underline{\alpha_o}$ *é o ângulo que a reta tangente, que está contida no plano* $\underline{\pi}$, *faz com a reta passa pelo ponto* $\underline{\gamma(0)}$ *e tem a direção do vetor* $\vec{v} \neq \vec{O}$, *que também está contido no plano* $\underline{\pi}$.

Observação

Conclusão: *geometricamente, as considerações acima podem ser caracterizadas na figura abaixo:*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_o) = \tan(\alpha_o)\,. \qquad (13)$$



Exemplo

Consideremos a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x\,,y) \doteq x^2 - x\,y + 5\,y\,, \quad para \;\; (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,. \qquad (14)$$

$$Calcular:\ \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_o),\ onde\ \vec{v} \doteq \left(\frac{3}{5}\,,-\frac{4}{5}\right)\ e\ P_o \doteq (-1\,,2)\,. \qquad (15)$$

Resolução: observemos que

$$\|\vec{v}\| \overset{(15)}{=} \left\|\left(\frac{3}{5}\,,-\frac{4}{5}\right)\right\| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = 1\,,$$

ou seja, o vetor $\underline{\vec{v}}$ é unitário, assim:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_o) \overset{(1)}{=} \lim_{t\to 0} \frac{f\,(P_o + t\cdot\vec{v}) - f(P_o)}{t}$$

$$\overset{(15)}{=} \lim_{t\to 0} \frac{f\left[(-1\,,2) + t\cdot\left(\frac{3}{5}\,,-\frac{4}{5}\right)\right] - f(-1\,,2)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f\left(-1+\frac{3}{5}\,t\,,2-\frac{4}{5}\,t\right)-f(-1\,,2)}{t}$$

$$\overset{(14)}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\left(13-\frac{36}{5}\,t+\frac{21}{25}\,t^2\right)-13}{t} = \lim_{t\to 0}\left(-\frac{36}{5}+\frac{21}{25}\,t\right) = -\frac{36}{5}\,.$$

Logo, pela Definição acima, existe $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_o)$ e

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_o) = -\frac{36}{5}\,. \tag{16}$$

$\square$

Observação

Observemos que, no Exemplo acima, para $)x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, *temos que:*

$$\nabla f(x\,,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\,,\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y)\right) \overset{(14)}{=} (2\,x - y\,,-x+5)\,, \qquad (17)$$

assim: $$\nabla f(P_o) \overset{(15)}{=} \nabla f(-1\,,2) \overset{(17)}{=} (-4\,,6)\,. \qquad (18)$$

Notemos que:

$$\nabla f(P_o) \bullet \vec{v} \overset{(18)\ e\ (15)}{=} (-4\,,6) \bullet \left(\frac{3}{5}\,,-\frac{4}{5}\right) = \frac{-12}{5} - \frac{24}{5}$$

$$= -\frac{36}{5} \overset{(16)}{=} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_o)\,,$$

ou seja:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_o) = \nabla f(P_o) \bullet \vec{v}\,.$$

O que ocorreu no Exemplo acima é geral...

Teorema

Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^2$ *aberto, não vazio, de* $\underline{\mathbb{R}^2}$, $P_o \doteq (x_o\,, y_o) \in A$, $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função e* $\underline{\vec{v} = (a\,, b)}$ *um vetor unitário de* V^2. *Se a função* $\underline{f}$ *é contínua, com derivadas parciais de 1.a ordem contínuas em* $\underline{P_o}$, *então a função* $\underline{f}$ *admitirá derivada direcional no ponto* $\underline{P_o}$, *na direção* $\underline{\vec{v}}$ *e*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_o) = \nabla f(P_o) \bullet \vec{v}\,. \tag{19}$$

Observação

Vale o análogo do Teorema acima, para uma função a valores reais, de $\underline{n}$ *variáveis reais, isto é, se* $f : A \overset{aberto}{\subseteq} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Observação

Sejam $\underline{A}$ *um subconjunto aberto de* $\underline{\mathbb{R}^2}$, $P_o \in A$, $f : A \to \mathbb{R}$ *uma função contínua, com derivadas parciais de 1.a ordem contínuas no ponto* $\underline{P_o}$ *e* $\gamma : I \overset{\text{aberto}}{\subseteq} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *uma curva parametrizada diferenciável, satisfazendo*

$$\gamma(t_o) = P_o\,, \ t_o \in I, \ \text{com } \gamma'(t_o) \neq \vec{O}\,,$$

cujo traço da curva parametrizada $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ *esteja contido em uma curva de nível associada à função* $\underline{f}$.

$$\text{Suponhamos que } \gamma(t) \doteq (x(t)\,, y(t))\,, \quad \text{para} \quad t \in I\,, \tag{20}$$

$$\text{como } g(t) \doteq f[\gamma(t)] = \text{constante}\,, \quad \text{para} \quad t \in I\,, \tag{21}$$

Como as funções $\underline{f}$ *e* $\underline{\gamma}$ *são diferenciáveis em* $\underline{P_o}$ *e* $\underline{t_o}$, *respectivamente, segue, da regra da cadeia, que a função* $\underline{g = f \circ \gamma}$ *será uma função diferenciável em* $\underline{t_o}$.

continuando...

Observação

Derivando, em relação a $\underline{t}$, a equação (20), obteremos, pela regra da cadeia, que:

$$0 \overset{(20)}{=} g'(t_o) = \frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(t_o) = \frac{d}{dt}\{f[(x(t)\,,y(t))]\}\Big|_{t=t_o}$$

$$\overset{\text{regra da cadeia}}{=} f_x[(x(t_o)\,,y(t_o))]\,\frac{dx}{dt}(t_o) + f_y[(x(t_o)\,,y(t_o))]\,\frac{dy}{dt}(t_o)$$

$$= \nabla f[\gamma(t_o)] \bullet \gamma'(t_o) \overset{\|\gamma'(t_o)\|\neq 0}{=} \|\gamma'(t_o)\| \left(\nabla f[\gamma(t_o)] \bullet \frac{\gamma'(t_o)}{\|\gamma'(t_o)\|}\right)$$

$$= \|\gamma'(t_o)\|\, \nabla f[\gamma(t_o)] \bullet \vec{v},$$

onde $\vec{v} \doteq \dfrac{\gamma'(t_o)}{\|\gamma'(t_o)\|}$.

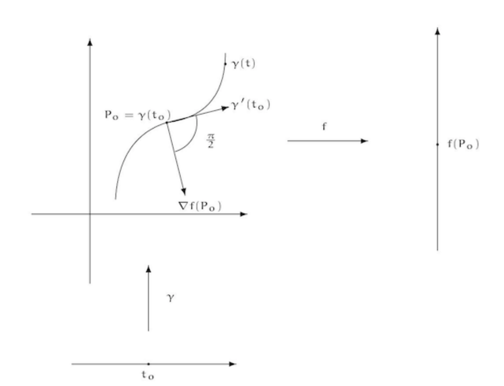
Observação

Por construção, o vetor $\underline{\vec{v}}$ *é um vetor unitário de* $\underline{V^2}$.

$$\textit{Como} \ \ \|\gamma'(t_o)\| \neq 0\,,$$

$$\textit{deveremos ter } \nabla f[\gamma(t_o)] \bullet \vec{v} = 0\,,$$

ou seja, os vetores $\underline{\nabla f(P_o)}$ *e* $\underline{\gamma'(t_o)}$ *são ortogonais, ou ainda, o vetor gradiente da função* $\underline{f}$ *no ponto* $\underline{P_o}$, *é ortogonal à curva de nível associada à função* $\underline{f}$, *que contém o ponto* P_o *(figura abaixo).*



Observação

- **Conclusão:** *a derivada direcional da função* $\underline{f}$ *no ponto* $\underline{P_o = \gamma(t_o)}$, *na direção do vetor tangente (unitário) à uma curva de nível associada à função* $\underline{f}$ *no ponto* $\underline{P_o}$, *será nula.*
- *se* $\nabla f(P_o) \neq \vec{O}$, *como visto na Geometria Analítica, temos que:*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_o) = \nabla f(P_o) \bullet \vec{v} \overset{G.A.}{=} \|\nabla f(P_o)\| \, \|\vec{v}\| \cos(\theta) \overset{\|\vec{v}\|=1}{=} \|\nabla f(P_o)\| \cos(\theta), \tag{22}$$

onde $\theta \in [0, \pi]$ *é o ângulo entre os vetores, não nulos,* $\underline{\nabla f(P_o)}$ *e* $\underline{\vec{v}}$.

Corolário

Sejam $\underline{A}$ subconjunto aberto, não vazio, de $\underline{\mathbb{R}^2}$, $P_o \doteq (x_o\,, y_o) \in A$, $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua, com derivadas parciais de 1.a ordem, em $\underline{P_o}$, satisfazendo

$$\nabla f(P_o) \neq \vec{O} \quad e \quad \vec{v} \in V^2$$

um vetor unitário. Então a derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_o)$ assumirá seu maior valor quando

$$\vec{v} = \frac{\nabla f(P_o)}{\|\nabla f(P_o)\|}. \tag{23}$$

e a derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_o)$ assumirá seu menor valor quando

$$\vec{v} = -\frac{\nabla f(P_o)}{\|\nabla f(P_o)\|}. \tag{24}$$

Finalmente, a derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_o)$ será nula se o vetor $\underline{\vec{v}}$ for um vetor tangente (unitário) à curva de nível $\underline{f(P_o)}$, associada à função $\underline{f}$, ou seja, à curva parametrizada $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to A \subseteq \mathbb{R}^2$, tal que

$$f[\gamma(t)] = f(P_o)\,, \quad para \quad t \in I\,.$$

Observação

Vale o análogo do Corolário acima, para funções a valores reais, de $\underline{n}$ *variáveis reais, isto é, suponhamos que* $f : A \overset{aberto}{\subseteq} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua, com derivadas parciais de 1.a ordem contínuas, em* $\underline{P_o}$*, com*

$$\nabla f(P_o) \neq \vec{O} \quad \text{e} \quad \vec{v} \in V^n$$

um vetor unitário. Então a derivada direcional $\partial_{\vec{v}} f(P_o)$ *será máxima se, e somente se,*

$$\vec{v} \doteq \frac{\nabla f(P_o)}{\|\nabla f(P_o)\|},$$

será mínima se, e somente se,

$$\vec{v} \doteq -\frac{\nabla f(P_o)}{\|\nabla f(P_o)\|}$$

e será nula se o vetor $\underline{\vec{v}}$ *é um vetor (unitário) tangente à hiper-superfície de nível* $\underline{f(P_o)}$*, associada à função* $\underline{f}$*.*

Observação

Como a derivada direcional pode ser interpretada como o coeficiente angular da reta tangente a representação geométrica do gráfico de uma função a valores reais, de uma variável real, segue que ela, em um certo sentido, nos fornece o crescimento (ou decrescimento) da função.
As conclusões do Corolário acima, nos dizem que, estando em um ponto $\underline{P_o}$ *do domínio da função* $\underline{f}$, *a direção e sentido que devemos tomar para que a função* $\underline{f}$ *cresça mais rapidamente, é direção e sentido do gradiente da função* $\underline{f}$ *em* $\underline{P_o}$.
Por outro lado, a direção e sentido que devemos tomar para que a função $\underline{f}$ *decresça mais rapidamente, é a direção e sentido oposto do gradiente da função* $\underline{f}$ *em* $\underline{P_o}$.
E, finalmente, a direção que devemos tomar para que a função $\underline{f}$ *não cresça, nem decresça, isto é, fique constante, é a do vetor tangente às hiper-superfícies de nível* $\underline{f(P_o)}$, *associadas à função* $\underline{f}$ *no ponto* $\underline{P_o}$.

Observação

Geometricamente, as considerações acima podem ser caracterizadas pela figura abaixo: