Superfície parametrizada em $\mathbb{R}^3$

Definição

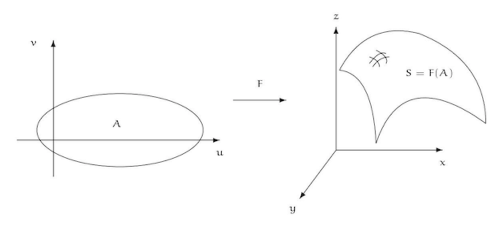
Suponhamos que a função $F : A \to \mathbb{R}^3$ é dada por

$$F(u\,,v) \doteq (x(u\,,v)\,,y(u\,,v)\,,z(u\,,v))\,, \quad para \quad (u\,,v) \in A\,, \qquad (1)$$

onde o conjunto $\underline{A}$ é um subconjunto aberto, não vazio, de $\underline{\mathbb{R}^2}$. A imagem $S \doteq F(A) \subseteq \mathbb{R}^3$, daremos o nome de **superfície parametrizada pela função $\underline{F}$**.

Observação

Geometricamente:



Definição

Seja $S \doteq F(A) \subseteq \mathbb{R}^3$ *uma superfície parametrizada pela função* $\underline{F}$, *como na Definição acima e* $P_o \in S$.
Diremos que um vetor $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ *é um* **vetor tangente à superfície parametrizada** $\underline{S}$**, no ponto** $\underline{P_o}$, *se podemos encontrar uma curva parametrizada diferenciável, passando, no instante* $\underline{t_o}$, *pelo ponto* $\underline{P_o}$, *cujo traço está contido na superfície* $\underline{S}$ *e cujo vetor velocidade no instante* $\underline{t_o}$, *coincide com* $\underline{\vec{u}}$, *ou seja, se podemos encontrar uma curva parametrizada diferenciável*

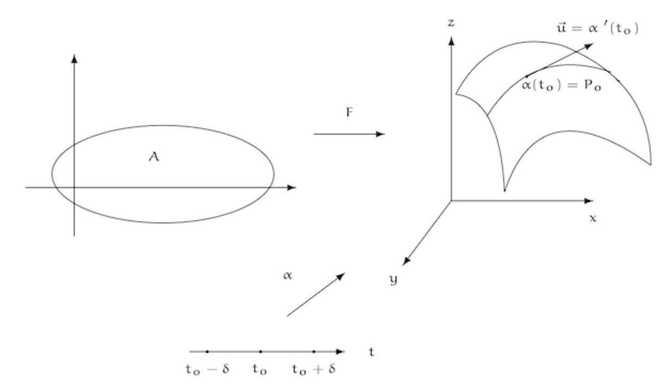
$$\alpha : I \doteq (t_o - \delta\,, t_o + \delta) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\,,$$

de modo que

$$\alpha(t_o) = P_o\,, \;\; \alpha(t) \in S\,, \quad \text{para} \quad t \in I \quad \text{e} \quad \vec{u} = \alpha'(t_o)\,.$$

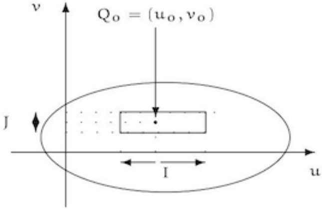
Observação

Geometricamente:



ou seja, o vetor $\underline{\vec{u}}$ *deverá ser vetor tangente a alguma curva parametrizada diferenciável, que passa pelo ponto* $P_o \in S$ *e está contida na superfície* $\underline{S}$.

A seguir, exibiremos dois vetores tangentes a uma superfície parametrizada no ponto $P_o \in S$, particularmente importantes.
Seja $Q_o \doteq (u_o\,, v_o) \in A$, um ponto do conjunto $\underline{A}$.
Como o conjunto $\underline{A}$ é um subconjunto aberto em $\underline{\mathbb{R}^2}$, podemos encontrar $I\,, J \subseteq \mathbb{R}$, intervalos aberto de $\underline{\mathbb{R}}$, de modo que $I \times J \subseteq A$, ou seja, o retângulo $\underline{I \times J}$ está contido em $\underline{A}$ (figura abaixo).



Consideremos as seguintes duas curvas parametrizadas, cujos traços estão contidos na superfície parametrizada $S = F(A)$, a saber:

$$\gamma : I \to S\,,$$

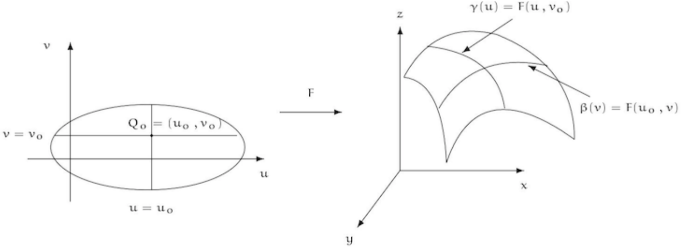
$$\text{dada por}\quad \gamma(u) \doteq F(u\,,v_o)\,,\quad \text{para}\quad u \in I\,, \tag{2}$$

$$\beta : J \to S\,,$$

$$\text{dada por}\quad \beta(v) \doteq F(u_o\,,v)\,,\quad \text{para}\quad v \in J\,, \tag{3}$$

que serão denominadas **linhas coordenadas da superfície parametrizada $S = F(A)$ no ponto $P_o = F(u_o\,,v_o)$**.

Geometricamente:



Suponhamos que a função $F : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$F(u\,,v) \doteq (x(u\,,v)\,,y(u\,,v)\,,z(u\,,v))\,, \quad \text{para} \quad (u\,,v) \in A\,, \qquad (4)$$

seja uma função de modo que cada uma de suas funções coordenadas, a saber, as funções $x\,,y\,,z : A \to \mathbb{R}$, são funções contínuas, com derivadas parciais contínuas em $\underline{A}$.

Definição

Neste caso, diremos que a superfície parametrizada $S \doteq F(A)$ é uma **superfície parametrizada diferenciável**.

Com isto temos que as curvas parametrizadas

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^3 \quad \text{e} \quad \beta : J \to \mathbb{R}^3\,,$$

introduzidas anteriormente (isto é, as linhas de coordenadas, dadas por (2) e (3)), serão curvas parametrizadas diferenciáveis, em

$$u_o \in I \quad \text{e} \quad v_o \in J\,,$$

respectivamente.

Além disso, os vetores tangentes às linhas coordenadas

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^3 \quad \text{e} \quad \beta : J \to \mathbb{R}^3 , \quad \text{em} \quad u_o \in I \quad \text{e} \quad v_o \in J ,$$

respectivamente, serão dados por:

$$\gamma'(u_o) \overset{(2)}{=} \frac{d}{du}[F(u, v_o)]\Big|_{u=u_o} \overset{(4)}{=} \frac{d}{du}(x(u, v_o), y(u, v_o), z(u, v_o))\Big|_{u=u_o}$$

$$\overset{\text{Def. de derivada parcial}}{=} \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_o, v_o), \frac{\partial y}{\partial u}(u_o, v_o), \frac{\partial z}{\partial u}(u_o, v_o)\right)$$

$$\overset{\text{notação:}}{=} \partial_u F(x_o, y_o) \tag{5}$$

$$\beta'(v_o) \overset{(2)}{=} \frac{d}{dv}[F(u_o, v]\Big|_{v=v_o} \overset{(4)}{=} \frac{d}{dv}(x(u_o, v), y(u_o, v), z(u_o, v))\Big|_{v=v_o}$$

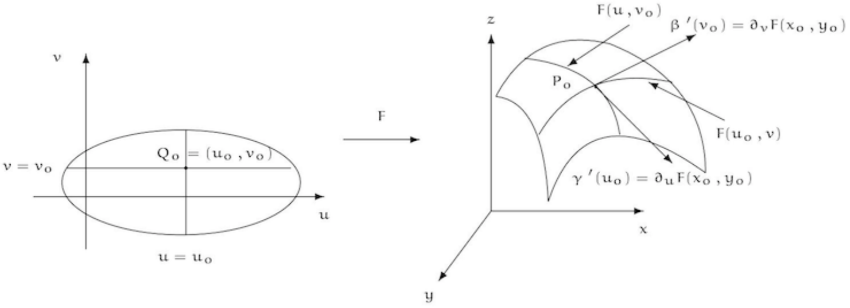
$$\overset{\text{Def. de derivada parcial}}{=} \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_o, v_o), \frac{\partial y}{\partial v}(u_o, v_o), \frac{\partial z}{\partial v}(u_o, v_o)\right)$$

$$\overset{\text{notação:}}{=} \partial_v F(x_o, y_o) . \tag{6}$$

Em particular, os vetores

$$\gamma'(u_o) \quad \text{e} \quad \beta'(v_o)\,,$$

dados por (5) e (6), respectivamente, serão vetores tangentes à superfície parametrizadas diferenciável $\underline{S \doteq F(A)}$, no ponto $P_o \doteq F(Q_o)$ (figura abaixo).



Baseado nas considerações acima, temos a:

Definição

Na situação acima, suponhamos que, para cada $(u\,,v) \in A$*, tenhamos*

$$\gamma\,'(u) \times \beta\,'(v) \neq \vec{O}\,, \tag{7}$$

onde $\underline{\times}$ *denota o produto vetorial em* $\underline{V^3}$*, ou seja, os vetores* $\underline{\gamma\,'(u)}$ *e* $\underline{\beta\,'(v)}$ *são L.I. em* $\underline{V^3}$*, para cada* $(u\,,v) \in A$*.*
Neste caso, diremos que a superfície parametrizada diferenciável $\underline{S = F(A)}$ *é uma* **superfície parametrizada regular de** $\underline{\mathbb{R}^3}$*.*

Observação

Suponhamos que $\underline{S \doteq F(A)}$ *é superfície parametrizada regular e* $\alpha : K \to \mathbb{R}^3$*, é uma curva parametrizada diferenciável, cujo traço está contido na superfície* $\underline{S}$ *e* $s_o \in K$*, onde* $\underline{K}$ *é um intervalo aberto de* $\underline{\mathbb{R}}$*. Então, o vetor tangente à curva parametrizada* $\alpha : K \to S$*, no ponto* $\underline{s_o}$*, isto é, o vetor* $\underline{\alpha\,'(s_o)}$*, pode ser escrito como combinação linear dos vetores (eles são L.I. em* $\underline{V^3}$*)*

$$\gamma\,'(u_o) \quad e \quad \beta\,'(v_o)\,,$$

Observação

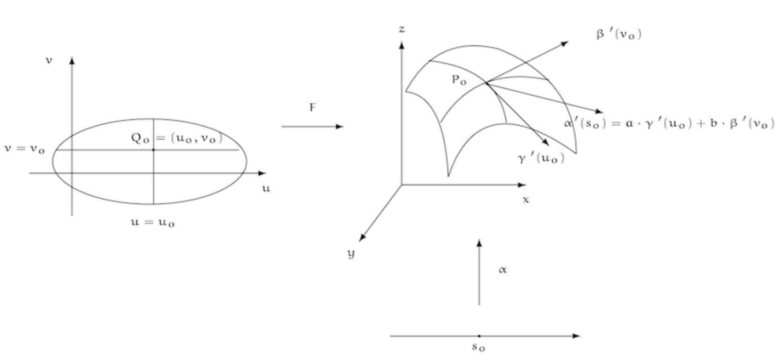
Logo, podemos encontrar constantes $a\,,b \in \mathbb{R}$, *de modo que*

$$\alpha'(s_o) = a \cdot \gamma'(u_o) + b \cdot \beta'(v_o)\,, \tag{8}$$

$$\text{onde} \quad P_o \doteq \alpha(s_o) = (x(u_o\,,v_o)\,, y(u_o\,,v_o)\,, y(u_o\,,v_o))\,,$$

$$\text{e} \quad \alpha(s_o) = \gamma(u_o) = \beta(v_o)\,, \quad \text{para algum } u_o \in I \text{ e } v_o \in J.$$

Geometricamente



Observação

Vale observar que, da disciplina de Geometria Analítica, dois vetores de $\underline{V^3}$ têm produto vetorial não nulo se, e somente se, eles são L.I. em $\underline{V^3}$.
Logo, esses dois vetores juntamente com um único ponto, geram um plano em $\underline{\mathbb{R}^3}$.
Em particular, se a superfície parametrizada $\underline{S = F(A)}$ é regular, segue que os vetores tangentes às linhas coordenadas são vetores tangentes superfície $\underline{S}$, que serão L.I. em $\underline{V^3}$, isto é, os vetores

$$\gamma'(u_o) \quad e \quad \beta'(v_o),$$

serão vetores tangentes à superfície $\underline{S = F(A)}$, no ponto $\underline{(u_o, v_o)}$ e são L.I. em $\underline{V^3}$.
Portanto eles, juntamente com o ponto $\underline{P_o \doteq F(Q_o)}$ da superfície $\underline{S = F(A)}$, geram um único plano de $\underline{\mathbb{R}^3}$.

Baseado nas considerações acima...

Plano tangente

Definição

Na situação acima, definimos o **plano tangente à superfície parametrizada regular $S \doteq F(A)$, no ponto**

$$P_o \doteq F(Q_o) = (x(u_o\,, v_o)\,, y(u_o\,, v_o)\,, z(u_o\,, v_o))\,,$$

como sendo o plano de $\mathbb{R}^3$, que contém o ponto P_o e tem como vetores diretores os vetores

$$\gamma\,'(u_o) \quad e \quad \beta\,'(v_o)\,,$$

que são vetores L.I em V^3, pois a superfície parametrizada é regular e eles são vetores tangentes à superfície parametrizada diferenciável $S = F(A)$, no ponto $Q_o \doteq (u_o\,, v_o)$.

Observação

Uma equação vetorial do plano tangente à superfície parametrizada regular $\underline{S = F(A)}$, *no ponto*

$$P_o \doteq F(Q_o) = (x(u_o\,, v_o)\,, y(u_o\,, v_o)\,, z(u_o\,, v_o))\,,$$

pode ser dada, explicitamente, por:

$$X = P_o + t \cdot \gamma\,'(u_o) + s \cdot \beta\,'(v_o)\,, \quad \textit{para} \quad t\,, s \in \mathbb{R}\,. \tag{9}$$

O vetor

$$\gamma\,'(u_o) \times \beta\,'(v_o)$$

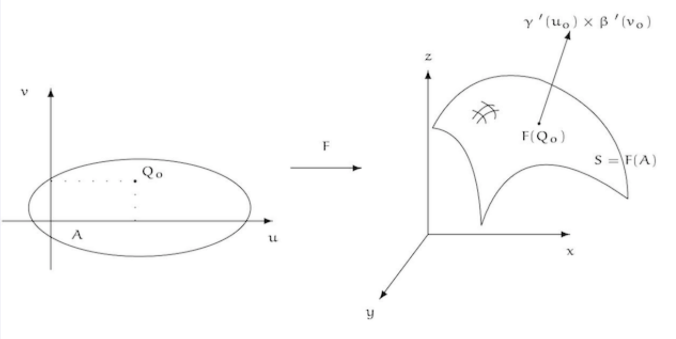
será dito **vetor normal a superfície parametrizada regular** $\underline{\underline{S = F(A)}}$**, no ponto** $\underline{\underline{Q_o \doteq (u_o\,, v_o)}}$.

Observação

Observemos que, na situação acima, o vetor

$$\gamma'(u_o) \times \beta'(v_o)$$

será dito vetor normal a superfície $\underline{S = F(A)}$, no ponto $\underline{Q_o = (u_o\,, v_o)}$ e **<u>não</u>** *no ponto $\underline{P_o = F(Q_o)}$, da superfície $\underline{S = F(A)}$ (veja a figura abaixo).*



Proposição

Sejam $\underline{B}$ *um subconjunto aberto, não vazio, de* $\underline{\mathbb{R}^3}$*,* $P_o \doteq (x_o\,, y_o\,, z_o) \in B$ *e* $f : B \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *uma função contínua, com derivadas parciais de 1.a ordem contínuas em* $\underline{P_o}$*, tal que*

$$\nabla f(P_o) \neq \vec{O}\,. \tag{10}$$

Então a superfície de nível $\underline{f(P_o)}$*, associada à função* $\underline{f}$*, pode ser obtida como uma superfície parametrizada regular em uma vizinhança do ponto* $\underline{P_o}$*, isto é, em uma bola aberta* $\underline{B_\delta(P_o)}$*, para algum* $\underline{\delta > 0}$*. Mais precisamente, podemos encontrar um subconjunto* $\underline{A}$ *aberto, não vazio, de* $\underline{\mathbb{R}^2}$ *e uma função* $F : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$*, de modo que* $\underline{S \doteq F(A)}$*, seja uma superfície parametrizada regular, com*

$$f(P_o) \in S \quad \text{e} \quad f[F(u\,, v)] = f(P_o)\,, \quad \text{para} \quad (u\,, v) \in A\,. \tag{11}$$

Além disso, o vetor $\underline{\nabla f(P_o)}$ *(que não é o vetor nulo) é um vetor normal (ou ortogonal) à superfície parametrizada regular* $\underline{S = F(A)}$ *no ponto* $\underline{P_o}$*, isto é, à superfície de nível da função* $\underline{f}$*, de valor* $\underline{f(P_o)}$*, que contém o ponto* $\underline{P_o}$*.*

Observação

No caso acima, uma equação geral do plano tangente à superfície parametrizada regular $\underline{S = F(A)}$, no ponto $\underline{P_o}$, será dada por:

$$f_x(P_o)\,(x - x_o) + f_y(P_o)\,(y - y_o) + f_z(P_o)\,(z - z_o) = 0\,, \tag{12}$$

$$\text{ou}\,,\quad P \in S \text{ se, e somente, se } \nabla f(P_o) \bullet (P - P_o) = 0\,, \tag{13}$$

onde $P \doteq (x\,, y\,, z) \in \mathbb{R}^3$.

Apliquemos as ideias acima aos:

Exemplo

Seja $\underline{S}$ *uma superfície que é o gráfico da equação*

$$x^2\, y\, z + 3\, y^2 = 2\, x\, z^2 - 8\, z\,, \quad para \;\; (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,, \tag{14}$$

$$ou, \;\; S \doteq \left\{(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\;;\; x^2\, y\, z + 3\, y^2 = 2\, x\, z^2 - 8\, z\right\}. \tag{15}$$

1. *mostrar que, em alguma vizinhança do ponto* $P_o \doteq (1\,,2\,,-1) \in S$, *à superfície* $\underline{S}$ *pode ser obtida como uma superfície parametrizada regular;*

2. *encontrar uma equação geral do plano tangente à superfície* $\underline{S}$ *no ponto* $P_o = (1\,,2\,,-1)$ *acima;*

3. *encontrar uma equação vetorial da reta normal à superfície* $\underline{S}$, *no ponto* P_o *acima;*

4. *a reta normal obtida acima, intercepta o plano* $\underline{\pi}$, *que tem por equação geral* $\pi \; : \; x + 3\, y - 2\, z = 10$ *? Caso afirmativo, em que ponto se interceptam ?*

Resolução:

Do item 1.: consideremos a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x\,,y\,,z) = x^2\,y\,z + 3\,y^2 - 2\,x\,z^2 + 8\,z \;(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3. \qquad (16)$$

Notemos que a superfície $\underline{S}$, será a superfície de nível zero, associada à função $\underline{f}$, isto é,

$$S = \left\{(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,;\; f(x\,,y\,,z) = 0\right\}\,. \qquad (17)$$

$$\text{Notemos:}\quad f(P_o) = f(1\,,2\,,-1) \overset{(16)\text{ com } x \doteq 1\,, y \doteq 2 \text{ e } z \doteq -1}{=} 0\,,$$

$$\text{isto é,}\quad P_o = (1\,,2\,,-1) \in S \quad (\text{veja } (17))\,.$$

Além disso, a função $\underline{f}$, dada por (16), é contínua, com derivadas parciais de 1.a ordem contínuas em $\underline{\mathbb{R}^3}$ e se $P = (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P) \overset{(17)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left[x^2yz + 3y^2 - 2xz^2 + 8z\right] = 2x\,yz - 2z^2, \qquad (18)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(P) \overset{(17)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left[x^2yz + 3y^2 - 2xz^2 + 8\,z\right] = x^2z + 6y, \qquad (19)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(P) \overset{(17)}{=} \frac{\partial}{\partial z}\left[x^2yz + 3y^2 - 2xz^2 + 8z\right] = x^2y - 4xz + 8. \qquad (20)$$

$$\text{Logo, } \nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x\,, y\,, z)\,, \frac{\partial f}{\partial y}(x\,, y\,, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x\,, y\,, z) \right)$$

$$\overset{(18),(19),(20)}{=} \left(2xyz - 2z^2, x^2z + 6y, x^2y - 4xz + 8\right)\;, \quad (21)$$

$$\text{assim: } \nabla f(1, 2, -1) \overset{(21)\,,\ \text{com } x \doteq 1, y \doteq 2, z \doteq -1}{=} (-6, 11, 14) \neq \vec{O}\,. \quad (22)$$

Logo, da Proposição 0.1 segue que, em uma vizinhança do ponto $P_o = (1\,, 2\,, -1) \in S$, a superfície $\underline{S}$ pode ser obtida como uma superfície parametrizada regular.
<u>Do item 2.:</u> da Proposição 0.1, segue que o vetor

$$\nabla f(P_o) = \nabla f(1\,, 2\,, -1) \overset{(22)}{=} (-6\,, 11\,, 14)\,,$$

será um vetor normal à superfície $\underline{S}$, em $P_o = (1\,, 2\,, -1) \in S$.

Logo, como visto na Geometria Analítica, temos que uma equação geral do plano π procurado, que indicaremos por $\underline{\pi}$, tangente à superfície $\underline{S}$, no ponto $\underline{P_o}$, será da forma:

$$\pi \ : \ -6\,x + 11\,y + 14\,z + d = 0\,, \tag{23}$$

onde a constante $\underline{d}$ pode ser obtida utilizando-se que o ponto $P_o = (1\,,2\,,-1)$ pertence ao plano $\underline{\pi}$, isto é,

$$-\,6 + 22 - 14 + d = 0\,,\ \text{ou seja,}\ \ d = -2\,. \tag{24}$$

Portanto, de (23) e (23), uma equação geral do plano $\underline{\pi}$, tangente à superfície $\underline{S}$, no ponto $P_o = (1\,,2\,,-1)$, será dada por:

$$-\,6\,x + 11\,y + 14\,z - 2 = 0\,. \tag{25}$$

Do item 3.: como o vetor

$$\nabla f(P_o) \overset{(22)}{=} (-6\,,11\,,14)$$

é um vetor normal à superfície $\underline{S}$, temos que uma equação vetorial da reta, que indicaremos por $\underline{r}$, normal à superfície $\underline{S}$, no ponto $\underline{P_o}$, será da forma:

$$r\ :\ X = P_o + t \cdot \nabla f(P_o)\,,\quad \text{para}\quad t \in \mathbb{R}\,,$$
$$\text{ou seja,}\quad (x\,,y\,,z) = (1\,,2\,,-1) + t \cdot (-6\,,11\,,14)\,,\, t \in \mathbb{R}\,. \qquad (26)$$

<u>**Do item 4.:**</u> seja $P \doteq (x\,,y\,,z)$ o ponto onde a reta normal do item 3. encontra o plano

$$x + 3\,y - 2\,z = 10\,. \tag{27}$$

Como o ponto $\underline{P}$ pertence à reta $\underline{r}$, deverá existir $\underline{t \in \mathbb{R}}$, tal que

$$\begin{aligned}(x\,,y\,,z) &= (1\,,2\,,-1) + t \cdot (-6\,,11\,,14) \\ &= (1 - 6\,t\,,2 + 11\,t\,,-1 + 14\,t)\,,\end{aligned} \tag{28}$$

para algum $t \in \mathbb{R}$.

Para esse ponto $\underline{P}$ pertencer ao plano $\underline{\pi}$, que tem equação geral (27), devemos ter:

$$(1 - 6\,t) + 3\,(2 + 11\,t) - 2\,(-1 + 14\,t) = 10\,,$$

ou seja, $\quad t = -1\,.$

Fazendo $\underline{t = -1}$ na equação (28), temos que o ponto que pertence a reta $\underline{r}$ normal e ao plano $\underline{\pi}$ acima, será o ponto

$$P \doteq (7\,,-9\,,-15)\,.$$

$\square$

Temos agora o:...

Exercício

Dada a curva parametrizada diferenciável $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, *cujas equações paramétricas, são dadas por:*

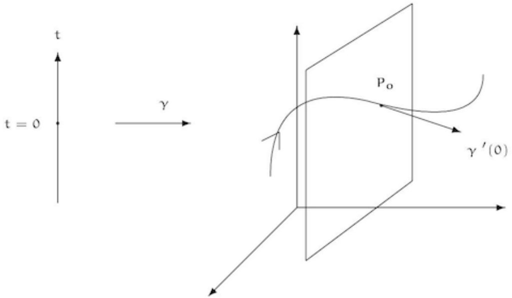
$$\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{-t} \\ z = \sqrt{2}\, t \end{cases} , \quad para \quad t \in \mathbb{R} \,, \tag{29}$$

$$\text{isto é,} \qquad \gamma(t) \doteq \left(e^t \,, e^{-t} \,, \sqrt{2}\, t\right) \,, \quad para \quad t \in \mathbb{R} \,, \tag{30}$$

encontrar uma equação geral do plano normal ao traço da curva parametrizada $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *em* $\underline{t = 0}$.
Em particular, teremos uma equação geral do plano normal ao traço da curva parametrizada $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *no ponto*

$$P_o \doteq \gamma(0) \overset{(30)}{=} (1 \,, 1 \,, 0) \,. \tag{31}$$

Resolução: observemos que um vetor normal ao plano normal ao traço da curva parametrizada $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ no ponto $\underline{P_o = \gamma(0)}$, será um vetor tangente à curva parametrizada em $\underline{t = 0}$, ou seja, será o vetor $\gamma\,'(0)$ (veja a figura abaixo).



$$\text{Mas} \quad \gamma\,'(t) \overset{(30)}{=} \left(e^{t}, -e^{-t}, \sqrt{2}\right) \neq \vec{O}\,, \quad \text{para} \quad t \in \mathbb{R}\,, \qquad (32)$$

logo a função vetorial $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ é uma curva parametrizada regular.

Portanto, o vetor

$$\gamma\,'(0) \overset{(32)\,,\ \text{com}\ t=0}{=} \left(1\,,-1\,,\sqrt{2}\right)\ ,$$

será um vetor normal ao plano procurado.

Logo, uma equação geral do plano normal ao traço da curva parametrizada $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, em $\underline{t = 0}$, será dada por:

$$1 \cdot x + (-1) \cdot y + \left(\sqrt{2}\right) \cdot z + d = 0\,,$$

$$\text{ou seja,} \qquad x - y + \sqrt{2}\,z + d = 0\,. \tag{33}$$

$$\text{Como o ponto} \quad P_o = \gamma(0) \overset{(31)\,,\ \text{com}\ t=0}{=} (1\,,1\,,0)\,, \tag{34}$$

deve pertencer ao plano procurado, deveremos ter:

$$1 - 1 + \sqrt{2} \cdot 0 + d = 0\,,\ \text{isto é},\ d = 0\,. \tag{35}$$

Portanto, substituindo (35) na equação (33), uma equação geral do plano normal à curva parametrizada $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, em $t = 0$, será dada por:

$$x - y + \sqrt{2}\,z = 0\,.$$

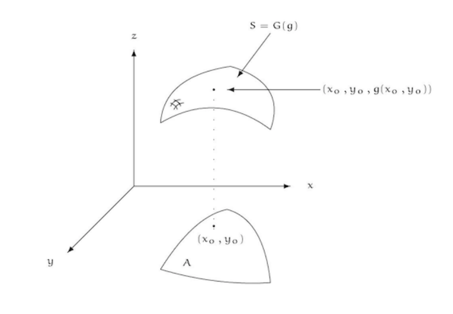
$\square$

Observação

Consideremos $\underline{A}$ *um subconjunto aberto, não vazio, em* $\underline{\mathbb{R}^2}$, $(x_o\,,y_o) \in A$ *e* $g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função. Suponhamos que a superfície* $\underline{S}$ *é o gráfico da função* $\underline{g}$, *isto é,*

$$S \doteq \{(x\,,y\,,g(x\,,y)) \in \mathbb{R}^3\,;\,(x\,,y) \in A\} \subseteq \mathbb{R}^3\,, \tag{36}$$

onde a função $\underline{g}$ *é uma função contínua, com derivadas parciais de 1.a ordem contínuas em* $\underline{A}$ *(figura abaixo).*



Questão: como obter a equação geral do plano tangente à superfície $\underline{S}$, *no ponto* $P_o \doteq (x_o\,,y_o\,,g(x_o\,,y_o))$, *se este existir?*

Para responder esta questão, observemos que se considerarmos a função $f : V \doteq A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, por

$$f(x\,,y\,,z) \doteq g(x\,,y) - z\,, \quad \text{para} \quad (x\,,y\,,z) \in V \qquad (37)$$

temos que a superfície $\underline{S}$ será a superfície de nível zero associada à função $\underline{f}$ isto é,

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; f(x,y,z) = 0\right\} \overset{(37)}{=} \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; g(x,y) - z = 0\right\}$$

$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z = g(x,y)\right\} \overset{(36)}{=} S\,.$$

Como a função $\underline{f}$, dada por (37), é contínua, com derivada parciais de 1.a ordem contínuas em $\underline{V}$ e

$$\nabla f(x\,,y\,,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y\,,z)\,,\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y\,,z)\,,\frac{\partial f}{\partial z}(x\,,y\,,z)\right)$$

$$\overset{(37)}{=} \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x\,,y)\,,\frac{\partial g}{\partial y}(x\,,y)\,,-1\right)\,, \qquad (38)$$

assim: $\nabla f(x_o\,,y_o\,,z_o) \overset{(38)}{=} \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_o\,,y_o)\,,\frac{\partial g}{\partial y}(x_o\,,y_o)\,,-1\right) \neq \vec{O}\,.$

Logo, da Proposição 0.1, segue que este vetor será um vetor normal a superfície $\underline{S}$, no ponto $\underline{P_o \doteq (x_o\,, y_o\,, g(x_o\,, y_o))}$. Portanto, uma equação geral do plano tangente à superfície $\underline{S}$, no ponto $\underline{P_o}$, poderá ser dada por (devido a (12) e (38)):

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_o\,, y_o)\cdot x + \frac{\partial g}{\partial y}(x_o\,, y_o)\cdot y + (-1)\cdot z + d = 0\,. \tag{39}$$

Como o ponto $P_o = (x_o\,, y_o\,, g(x_o\,, y_o))$ deverá pertencer a este plano, cuja equação geral é dada por (39), deveremos ter:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_o\,, y_o)\,x_o + \frac{\partial g}{\partial y}(x_o\,, y_o)\,y_o - g(x_o\,, y_o) + d = 0\,,$$

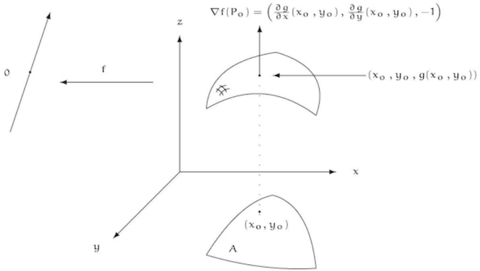
$$\text{ou seja,}\quad d = g(x_o\,, y_o) - \frac{\partial g}{\partial x}(x_o\,, y_o)\,x_o - \frac{\partial g}{\partial y}(x_o\,, y_o)\,y_o\,. \tag{40}$$

Portanto, substituindo (40) na equação do plano tangente à superfície S no ponto P_o, isto é, na equação (39), obteremos:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_o\,,y_o)\,x + \frac{\partial g}{\partial y}(x_o\,,y_o)\,y - z + g(x_o\,,y_o) - \frac{\partial g}{\partial x}(x_o\,,y_o)\,x_o$$
$$- \frac{\partial g}{\partial y}(x_o\,,y_o)\,y_o = 0\,,$$

ou: $$z = g(x_o\,,y_o) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_o\,,y_o)\,(x - x_o) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_o\,,y_o)\,(y - y_o)\,.$$

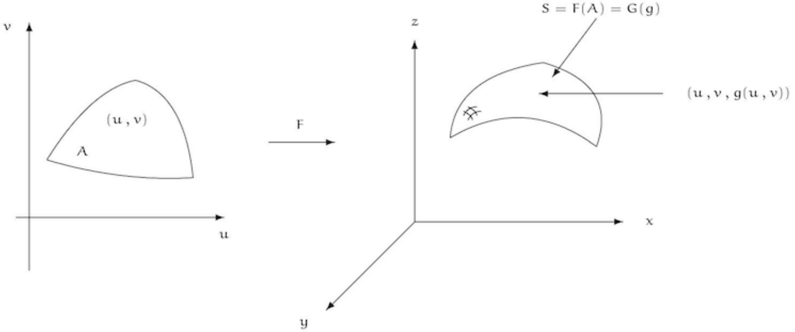
Geometricamente:



Outro modo de tratar o problema acima seria considerar uma função $F : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$F(u\,,v) \doteq (u\,,v\,,g(u\,,v))\,, \text{ para cada } (u\,,v) \in A\,. \tag{41}$$

Geometricamente:



Como a função $\underline{g}$ é contínua, com derivadas parciais de 1.a ordem contínuas em $\underline{A}$, segue que a função $\underline{F}$ também terá essas propriedades. Além disso,

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) \stackrel{(41)}{=} \left(1, 0, \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\right) \text{ e } \frac{\partial F}{\partial v}(u,v) \stackrel{(41)}{=} \left(0, 1, \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right),$$

para $(u\,,v) \in A$ e estes dois vetores são, obviamente, L.I. em $\underline{V^3}$. Portanto $\underline{S = F(A)}$ é uma superfície parametrizada regular e o plano tangente à superfície $\underline{S = F(A)}$, no ponto $\underline{(u_o\,,v_o)}$, terá uma equação geral dada no slide anterior.

De fato, pois as linhas coordenadas no ponto $(u_o\,,v_o) \in A$, a saber, as funções $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ e $\beta : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dadas por

$$\gamma(u) \doteq (u\,,v_o\,,g(u\,,v_o)) \tag{42}$$

$$\text{e} \qquad \beta(v) \doteq (u_o\,,v\,,g(u_o\,,v))\,, \tag{43}$$

para $u \in I$ e $v \in J$, respectivamente, serão funções diferenciáveis em $\underline{I}$ e $\underline{J}$ (que são intervalos abertos de $\underline{\mathbb{R}}$, tais que $\underline{I \times J \subseteq A}$), respectivamente, e os vetores

$$\gamma\,'(u) \overset{(42)}{=} \left(1\,,0\,,\frac{\partial g}{\partial u}(u\,,v)\right) \tag{44}$$

$$\text{e} \qquad \beta\,'(v) \overset{(42)}{=} \left(0\,,1\,,\frac{\partial g}{\partial v}(u\,,v)\right) \tag{45}$$

são, obviamente, L.I. em $\underline{V^3}$, para $(u\,,v) \in I \times J$.

Em particular, os vetores

$$\gamma'(u_o) = \left(1\,,0\,,\frac{\partial g}{\partial u}(u_o\,,v_o)\right) \tag{46}$$

$$\text{e} \qquad \beta'(v_o) = \left(0\,,1\,,\frac{\partial g}{\partial v}(u_o\,,v_o)\right)\,, \tag{47}$$

poderão ser tomados vetores diretores do plano em questão.
Assim uma equação vetorial do plano em questão, será dada por:

$$X = (u_o\,,v_o\,,g(u_o\,,v_o)) + t\cdot\gamma'(u_o) + t\cdot\beta'(v_o)\,, \quad \text{para} \quad t\,,s\in\mathbb{R}$$

e, por meio desta, podemos obter uma equação geral do plano em questão.

Resumindo temos, pelo menos, três modos diferentes de apresentar uma superfície parametrizada regular, em uma vizinhança de um ponto $\underline{P_o}$, pertencente a mesma, a saber:

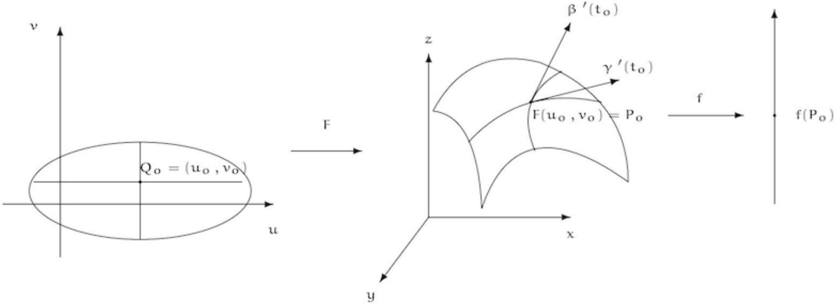
- Se a superfície $\underline{S}$ é dada como a imagem de uma aplicação $F : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ contínua, com derivadas parciais de 1.a ordem contínuas em $Q_o \doteq (u_o\,,v_o) \in A$, de tal modo que os vetores

$$\begin{aligned} &\gamma\,'(u_o) \;\; \text{e} \;\; \beta\,'(v_o) \text{ são L.I. em } \underline{V^3}, \\ \text{onde} \;\; &\gamma(u) \doteq F(u\,,v_o)\,, \quad \text{para} \quad u \in I \qquad (48) \\ \text{e} \;\; &\beta(v) \doteq F(u_o\,,v)\,, \quad \text{para} \quad v \in J\,, \qquad (49) \end{aligned}$$

  são as linhas coordenadas da superfície $\underline{S = F(A)}$, pelo ponto $(u_o\,,v_o)$, isto é, temos uma superfície parametrizada regular .
  Neste caso, uma equação vetorial do plano tangente à superfície parametrizada regular $\underline{S = F(A)}$, no ponto $Q_o = (u_o\,,v_o) \in A$, será dada por:

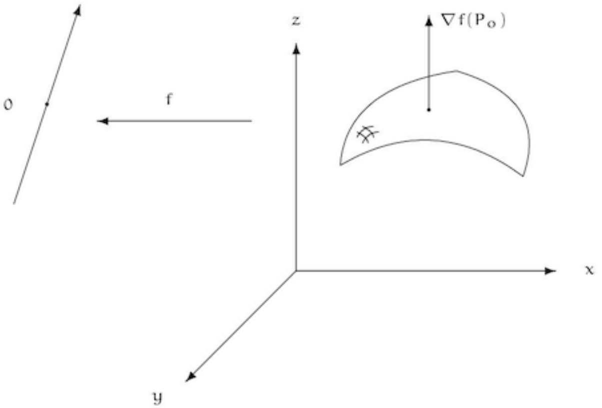
$$X = P_o + t \cdot \gamma\,'(u_o) + s \cdot \beta\,'(v_o)\,, \;\; \text{para cada} \;\; t\,,s \in \mathbb{R}\,. \qquad (50)$$

Geometricamente:



- Se a superfície $\underline{S}$ é dada como uma superfície do nível $f(P_o) = f(x_o\,,y_o\,,z_o)$ de uma função contínua, com derivadas parciais de 1.a ordem contínuas em B, $f : B \overset{\text{aberto}}{\subseteq} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, de modo que
$$\nabla f(P_o) \neq \vec{O}\,.$$
Neste caso, uma equação geral do plano tangente à superfície
$$S \subseteq \left\{P \in \mathbb{R}^3\,;\, f(P) = f(P_o)\right\}\,, \tag{51}$$
no ponto $P_o = (x_o\,,y_o\,,z_o) \in S$, será dada por:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_o)\,(x-x_o)+\frac{\partial f}{\partial y}(P_o)\,(y-y_o)+\frac{\partial f}{\partial z}(P_o)\,(z-z_o) = 0\,. \tag{52}$$
Em particular, o vetor $\underline{\nabla f(P_o)}$, que não é o vetor nulo, será um vetor normal a superfície $\underline{S}$ no ponto $\underline{P_o}$.

Geometricamente:



- Se a superfície $\underline{S}$, é dada como o gráfico de uma função $g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínua, com derivadas parciais de 1.a ordem contínuas em $\underline{A}$.
  Neste caso, uma equação geral do plano tangente à superfície

$$S \subseteq \left\{(x\,,y\,,g(x\,,y)) \in \mathbb{R}^3\,;\,(x\,,y) \in A\right\} \tag{53}$$

no ponto $P_o \doteq (x_o\,,y_o\,,g(x_o\,,y_o)) \in S$, será dada por:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_o\,,y_o)\,(x-x_o)+\frac{\partial g}{\partial y}(x_o\,,y_o)\,(y-y_o)-z+g(x_o\,,y_o)=0\,.$$