Máximos e mínimos

Definição

Seja $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *uma função. Diremos que* $P_o \in A$ *é um* **ponto de máximo global (ou absoluto) da função** f *se*

$$f(P) \leq f(P_o)\,, \quad para \quad P \in A\,. \tag{1}$$

Neste caso diremos que o valor $f(P_o)$ *é o* **valor do máximo global (ou absoluto) da função** f **no conjunto** A.

De modo semelhante, diremos que $P_o \in A$ *é um* **ponto de mínimo global (ou absoluto) da função** f *se*

$$f(P) \geq f(P_o)\,, \quad para \quad P \in A\,. \tag{2}$$

Neste caso diremos que valor $f(P_o)$ *é o* **valor do mínimo global (ou absoluto) da função** f **no conjunto** A.

Seja $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função. Temos também a:

Definição

Diremos que $P_o \in A$ é um **ponto de máximo local (ou relativo) da função f**, *se podemos encontrar uma bola*

$$\mathcal{B}_\delta \doteq \mathcal{B}_\delta(P_o)\,,$$

centrada no ponto P_o e raio $\delta > 0$, de modo que

$$f(P) \leq f(P_o)\,, \quad para \quad P \in A \cap \mathcal{B}_\delta\,. \tag{3}$$

Neste caso diremos que o valor $f(P_o)$ é o **valor de máximo local (ou relativo) da função f**.

Definição

De modo semelhante, diremos que $P_o \in A$ *é um* **ponto de mínimo local (ou relativo) da função** f*, se podemos encontrar uma bola* $\mathcal{B}_\delta \doteq \mathcal{B}_\delta(P_o)$*, centrada no ponto* P_o *e raio* $\delta > 0$*, de modo que*

$$f(P) \geq f(P_o), \quad para \quad P \in A \cap \mathcal{B}_\delta. \tag{4}$$

Neste caso diremos que $f(P_o)$ *é o* **valor de mínimo local (ou relativo) da função** f.

Observação

- *Empregaremos o termo* **extremo global (ou absoluto) da função** f **no conjunto** A.
- *De modo análogo, empregaremos o termo* **extremo local (ou relativo) da função** f *para designarmos um ponto do domínio da função* f *que é um ponto de máximo ou de mínimo local (ou relativo) da função* f.

Exemplo

Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x\,,y) \doteq x^2 + y^2\,,\ \textit{para cada}\ \ (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,. \tag{5}$$

Encontre, se existirem os extremos globais (ou absolutos) da função $\underline{f}$ em $\mathbb{R}^2$.

Resolução: notemos que, para $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, teremos:

$$f(x\,,y) \overset{(5)}{=} x^2 + y^2 \geq 0 \overset{(5),\ \text{com}\ x=y=0}{=} f(0\,,0)\,. \tag{6}$$

Logo, pela Definição 0.1 (veja (1)), o ponto

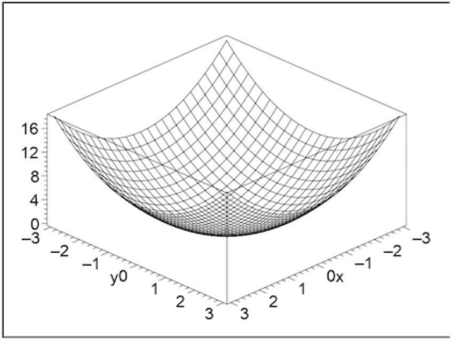
$$P_o \doteq (0\,,0)$$

é ponto de mínimo global (ou absoluto) da função $\underline{f}$ em $\mathbb{R}^2$ e

$$0 = f(0\,,0)$$

será o valor de mínimo global (ou absoluto) da função $\underline{f}$ em $\mathbb{R}^2$. Notemos também que a função $\underline{f}$ **não** possue máximo global (ou absoluto) em $\mathbb{R}^2$.

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é o paraboloide de revolução, com vértice na origem e "concavidade" voltada para cima (figura abaixo).



□

Observação

Se uma função $\underline{f}$ tem derivadas parciais de 1.a ordem em seu domínio e o gradiente da mesma não se anula, vimos anteriormente que, na direção e sentido de maior crescimento da função $\underline{f}$, perto de um ponto $\underline{P_o}$ do seu domínio, é fornecida pelo gradiente da função calculada no ponto $\underline{P_o}$.
Por outro lado, na direção e sentido oposto do gradiente da função calculada no ponto $\underline{P_o}$, teremos o decrescimento mais rápido da função, perto de um ponto $\underline{P_o}$.

Baseado nas considerações acima tratemos do:

Exemplo

Consideremos o conjunto

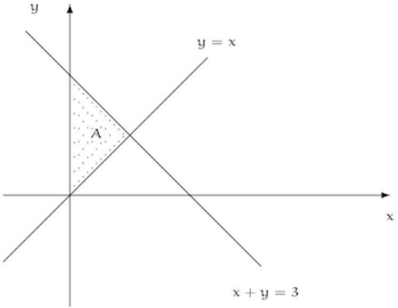
$$A \doteq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x\,, 0 \leq y\,, x+y \leq 3 \text{ e } x \leq y\right\} \subseteq \mathbb{R}^2 \tag{7}$$

e a função $f : A \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x\,,y) \doteq 2\,x - y\,, \quad \text{para} \ \ (x\,,y) \in A\,. \tag{8}$$

Encontrar, os pontos de máximo e mínimo globais de $\underline{f}$ em $\underline{A}$.

Resolução: observemos que a função f é contínua no conjunto A e o conjunto A é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^2$, pois é um subconjunto fechado e limitado em $\mathbb{R}^2$.
Logo, de um resultado anterior, segue que a função f tem máximo e mínimo globais no conjunto A.
A representação geométrica do domínio da função f é dada na figura abaixo:



Além disso, para $(x\,,y) \in A$, temos:

$$\nabla f(x\,,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y) \cdot \vec{e_1} + \frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y) \cdot \vec{e_2} \stackrel{(8)}{=} 2 \cdot \vec{e_1} - \vec{e_2} = (2\,,-1)\,.$$

Como vimos anteriormente, os valores da função $\underline{f}$ crescem mais rapidamente (respectivamente, diminuem mais rapidamente) à medida que se avança na direção e sentido (respectivamente, sentido contrário) do vetor gradiente da função, isto é, do vetor

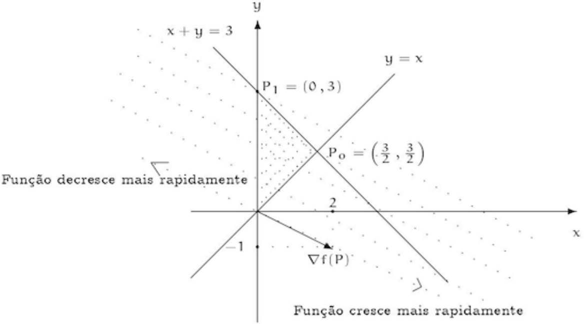
$$\nabla f(x\,,y) = 2 \cdot \vec{e_1} - \vec{e_2}\,, \qquad (9)$$

para cada $(x\,,y) \in A$.

Notemos que, neste exemplo, o vetor gradiente é constante (veja (9)).

Assim, das considerações acima, podemos concluir que a função cresce na direção e sentido do vetor (9) e decresce na direção e sentido oposto do vetor (9).

Logo pela ilustração abaixo podemos perceber que o máximo global da função $\underline{f}$ no conjunto $\underline{A}$, é atingido no ponto $P_o \doteq \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ e o seu mínimo global, ocorrerá ponto $P_1 \doteq (0\,,3)$ (figura abaixo)



Vamos verificar que isto de fato ocorre. Notemos que:

se $(x\,,y) \in A$, teremos (veja (7)): $\;x + y \leq 3\;$ e $\;x \leq y\,,$

somando-se estas duas desigualdades: $\;2\,x + y \leq 3 + y\;$ e $\;x \leq y\,,$

$$\text{que é equivalente à:}\quad x \leq \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad x - y \leq 0\,, \tag{10}$$

Logo, para cada $(x\,,y) \in A$, teremos:

$$\begin{aligned} f(x\,,y) - f\left(\frac{3}{2}\,,\frac{3}{2}\right) &\overset{(8)}{=} (2\,x - y) - \left[2 \cdot \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right] \\ &= 2\,x - y - \frac{3}{2} = \left(x - \frac{3}{2}\right) + (x - y) \overset{(10)}{\leq} 0\,, \end{aligned}$$

$$\text{ou seja,}\quad f(x\,,y) \leq f\left(\frac{3}{2}\,,\frac{3}{2}\right)\,,\quad \text{para}\quad (x\,,y) \in A\,,$$

$$\text{isto é, o ponto}\quad P_o = \left(\frac{3}{2}\,,\frac{3}{2}\right) \tag{11}$$

é um ponto de máximo global da função $\underline{f}$ no conjunto $\underline{A}$.

Notemos agora que, para $(x, y) \in A$, teremos:

$$f(x, y) - f(0, 3) \overset{(8)}{=} 2x - y - [2 \cdot 0 - 3] = 2x - y + 3$$

$$= 3x + (3 - x - y) \overset{\text{de (7) temos: } x \geq 0 \text{ e } 3 - x - y \geq 0}{\geq} 0 .$$

ou seja, $f(x, y) \geq f(0, 3)$, para $(x, y) \in A$,

isto é, o ponto $P_1 = (0, 3)$ (12)

é um ponto de mínimo global da função $\underline{f}$ no conjunto $\underline{A}$.
Ovalor máximo global de $\underline{f}$ no conjunto $\underline{A}$ será:

$$f(P_o) \overset{(11)}{=} f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \overset{(8)}{=} 2 \cdot \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} .$$

e o valor de mínimo global da função $\underline{f}$ no conjunto $\underline{A}$, será:

$$f(P_1) \overset{(12)}{=} f(0, 3) \overset{(8)}{=} 2 \cdot 0 - 3 = -3 .$$

Observação

No Exemplo 0.2 *acima, também podemos observar que as curvas de nível associadas à função* $\underline{f}$*, são as retas*

$$2\,x - y = k\,, \quad \textit{para cada} \quad k \in \mathbb{R}\,.$$

Logo se "andarmos" na direção perpendicular às essas retas, teremos as maiores variações da função $\underline{f}$*, mais precisamente, maior crescimento ou maior decrescimento da função* $\underline{f}$*.*
A direção perpendicular às retas

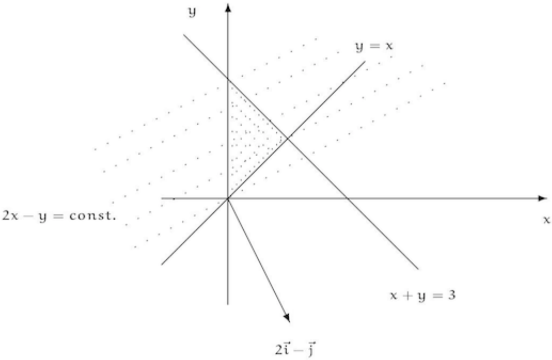
$$2\,x - y = f(x\,,y) = k$$

(que são as curvas de nível associadas à função $\underline{f}$*) é dada pelo vetor*

$$(2\,,-1) \in \mathbb{R}^2\,,$$

isto é, a direção do vetor gradiente da função $\underline{f}$ *(veja (9)) que, neste caso, é um vetor constante.*

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



Nosso objetivo a seguir, será encontrar todos os pontos de **máximos e/ou mínimos locais** de uma função de várias variáveis reais, a valores reais.
Para começar a encontrar tais pontos de máximos ou mínimos locais (ou relativos) de uma função a valores reais, de *n*-variáveis reais, temos o:

Teorema

Sejam A um subconjunto aberto em $\mathbb{R}^n$ *e* $f : A \to \mathbb{R}$ *uma função que tem máximo ou mínimo local no ponto* $P_o \in A$.
Se as derivadas parciais de 1.a ordem da f existirem no ponto P_o*, então elas deverão ser iguais a zero neste ponto, isto é,*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_o) = 0 \tag{13}$$

para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$*, ou seja,*

$$\nabla f(P_o) = 0 . \tag{14}$$

Observação

1. *Em outras palavras, o Teorema* 0.1 *acima nos diz que se uma função atinge um máximo ou mínimo local(ou seja, um extremo local) em um ponto pertencente ao interior do seu domínio e suas derivadas parciais existem neste ponto, então o gradiente da função deverá ser nulo neste ponto.*
   Deste modo, o Teorema 0.1 *fornece uma condição necessária para que um ponto, pertencente ao interior do domínio de uma função a valores reais, de várias variáveis reais, que tenha derivadas parciais no seu domínio, seja um extremo local da função.*
2. *Como veremos a seguir, esta condição pode não ser suficiente, isto é, existem funções que têm o gradiente nulo num ponto e a mesma não tem extremo local nesse ponto.*

Baseado nas considerações acima, introduziremos a:

Definição

Suponhamos que $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ seja diferenciável em $\underline{A}$, onde o conjunto $\underline{A}$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.

$$\text{Os pontos } P \in A, \text{ tais que } \nabla f(P) = 0 \tag{15}$$

serão chamados de **pontos críticos** *da função $\underline{f}$ no conjunto $\underline{A}$.*

Observação

Cuidado: *notemos que nem todo ponto crítico de uma função a valores reais, de várias variáveis reais, é ponto de máximo ou mínimo local da função. Para ver isto, considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x, y) \doteq x^2 - y^2, \text{ para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{16}$$

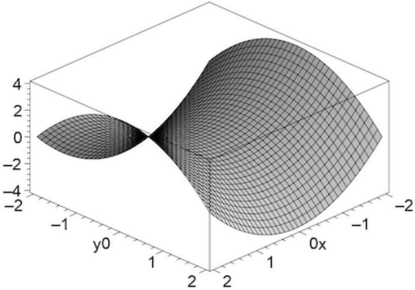
Para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, a $\underline{f}$ tem seu gradiente dado por:

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \vec{e}_2 \overset{(16)}{=} (2x, -2y)$$

que somente se anula no ponto $P_o \doteq (0, 0)$.

Notemos que o ponto $P_o = (0\,,0)$ **não** é um ponto de máximo nem de mínimo local da função f.

A representação geométrica do gráfico da função f é o paraboloide hiperbólico, isto é, a sela, representada na figura abaixo.



Neste caso temos a:

Definição

Um ponto crítico de uma função que não é ponto de máximo e nem de mínimo local será chamado de ***ponto de sela*** *da função.*

Observação

1. *Observemos que um ponto crítico* $\underline{P_o}$ *de uma função* $\underline{f}$*, é um ponto de sela da função* $\underline{f}$ *se, e somente se, em cada bola, que denotaremos por* $\mathcal{B}_\delta$*, centrada no ponto* $\underline{P_o}$ *e raio* $\delta > 0$*, contida no domínio da função* $\underline{f}$*, podemos encontrar pontos* $\underline{P_1}$ *e* $\underline{P_2}$*, pertencentes a mesma, de modo que*
$$f(P_1) < f(P_o) < f(P_2) .$$
2. *Notemos que, pelo Teorema* 0.1*, para localizar extremos locais de uma função que tem as derivadas parciais de 1.a ordem nos pontos interiores do seu domínio, basta restringirmos nossa atenção aos pontos críticos da função* $\underline{f}$*, ou seja, neste caso, os pontos de máximo ou mínimo locais da função* $\underline{f}$*, no interior do seu domínio, estarão entre os pontos críticos da função* $\underline{f}$*.*
Isto será de grande importância no estudo dos extremos locais (ou relativos) de uma função a valores reais, de várias variáveis reais, como veremos a seguir.

Teste do hessiano

Os resultados a seguir nos fornecerão **condições suficientes** para decidir se um ponto crítico de uma função a valores reais, de várias variáveis reais, é um ponto de máximo , mínimo local ou ponto de sela da função.

Apresentaremos primeiramente um resultado para funções a valores reais, de **duas variáveis reais**, conhecido como

teste do hessiano.

O caso de função a valores reais, de mais de duas variáveis reais, será tratado mais a frente.

Antes, porém, introduziremos a:

Definição

Seja $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 em $\underline{A}$ onde $\underline{A}$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $P \in A$.
Definimos a **matriz hessiana da função $\underline{f}$ no ponto $\underline{P}$**, *indicada por $\underline{Hess_f(P)}$, como sendo a seguinte matriz quadrada de ordem $\underline{n}$:*

$$Hess_f(P) \doteq \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(P) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_n}(P) \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_1}(P) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_n}(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\, \partial x_1}(P) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2}(P). \end{pmatrix} . \qquad (17)$$

continuando..

Definição

O determinante da matriz quadrada (17), será denotado por $\underline{H_f(P)}$ *e denominado* **<u>hessiano da função f no ponto P</u>**, *isto é,*

$$H_f(P) \doteq \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(P) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_n}(P) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_1}(P) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_n}(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\, \partial x_1}(P) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2}(P) \end{vmatrix}. \qquad (18)$$

Observação

Podemos dar a seguinte caracterização para a matriz hessiana associada a função $f : A \to \mathbb{R}$, no ponto $P \in A$, onde está é de classe C^2 em um subconjunto aberto $\underline{A}$ de $\mathbb{R}^n$: notemos que a função gradiente da função $\underline{f}$, isto é, a função $\nabla f : A \to \mathbb{R}$, dada por

$$\nabla f(P) \doteq \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \frac{\partial f}{\partial x_2}(P), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_1}(P)\right). \tag{19}$$

Como $f \in C^2(A\,;\,\mathbb{R})$, segue que $\nabla f \in C^1(A\,;\,\mathbb{R}^n)$, em particular, a matriz jacobiana associada à transformação $\underline{\nabla f}$, no ponto $\underline{P}$, será:

$$J_{\nabla f}(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)(P) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)(P) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)(P) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)(P) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)(P) \end{pmatrix}$$

continuando...

Observação

$$\overset{\text{Teorema de Schwarz}}{=} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(P) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_n}(P) \\ \dfrac{\partial f^2}{\partial x_2\, \partial x_1}(P) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_n}(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\, \partial x_1}(P) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2}(P) \end{pmatrix} \overset{(17)}{=} Hess_f(P)\,.$$

Conclusão: $$Hess_f(P) = J_{\nabla f}(P)\,, \quad para \quad P \in A. \tag{20}$$

Observação

Suponhamos que a função $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ seja de classe C^2 no subconjunto aberto $\underline{A}$ de $\mathbb{R}^2$ e $p \in A$. A matriz hessiana da função $\underline{f}$, no ponto $\underline{P}$, será dada por:

$$Hess_f(P) \overset{(17),\ com\ n=2}{=} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(P) \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(P) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P) \end{pmatrix}$$

$$\overset{Teorema\ de\ Schwarz}{=} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(P) \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(P) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P) \end{pmatrix}. \qquad (21)$$

Logo, de (21), segue que a matriz quadrada $\underline{Hess_f(P)}$ é uma matriz simétrica, isto é, $[Hess_f(P)]^t = Hess_f(P)$, onde $\underline{B^t}$ denota a matriz transposta associada à matriz $\underline{B}$.

continuando...

Observação

Além disso, no caso acima (ou seja, $n = 2$), o hessiano da função $\underline{f}$, no ponto $\underline{P}$, será dado por:

$$H_f(P) \overset{(21)}{=} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(P) \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(P) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(P)\right)^2 . \qquad (22)$$

Em geral...

Observação

em geral temos: se $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a função é de classe C^2 em um subconjunto aberto $\underline{A}$ de $\mathbb{R}^n$ segue, do Teorema de Schwarz, que a matriz quadrada $Hess(P)$ é uma matriz simétrica, isto é,

$$[Hess_f(P)]^t = Hess_f(P)\,. \tag{23}$$

Para classificar os pontos críticos de funções a valores reais, duas variáveis reias, de classe C^2 em um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$, temos o:

Teorema

(**teste do hessiano - caso n=2**) *Sejam* $f : A \subseteq \mathbb{R}^2$ *uma função de classe* C^2 *em um subconjunto aberto* $\underline{A}$ *de* $\mathbb{R}^2$ *e* $P_o \in A$ *é um ponto crítico da função* $\underline{f}$ *isto é,*

$$\nabla f(P_o) = 0\,. \tag{24}$$

Então:

$$(\mathbf{1})\ \text{se}\ \ H_f(P_o) > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_o) > 0\,,\ \text{então} \tag{25}$$

o ponto $\underline{P_o}$ *será um ponto de mínimo local da função* $\underline{f}$.

$$(\mathbf{2})\ \text{se}\ \ H_f(P_o) > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_o) < 0\,,\ \text{então} \tag{26}$$

o ponto $\underline{P_o}$ *será um ponto de máximo local da função* $\underline{f}$.

$$(\mathbf{3})\ H_f(P_o) < 0\,,\ \text{então} \tag{27}$$

o ponto $\underline{P_o}$ *será um ponto de sela da função* $\underline{f}$.

Observação

Podemos demonstrar um resultado equivalente ao Teorema 0.2 *acima, trocando-se a hipótese*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_o) > 0 \text{ em (25) ou (26), por: } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_o) > 0\,, \tag{28}$$

que as respectivas conclusões permanecerão válidas.

Apliquemos o Teorema 0.2 ao:

Exemplo

Classifique os pontos críticos da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*, dada por*

$$f(x\,,y) \doteq x^4 + y^4 - 2\,x^2 - 2\,y^2\,, \quad \text{para} \;\; (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,, \tag{29}$$

isto é, encontrar todos os pontos críticos da função $\underline{f}$ *e dizer, em cada um destes pontos, se a função tem ponto de máximo local, um ponto de mínimo local ou um ponto sela.*

Resolução:

Observemos que a função $\underline{f}$ é de classe C^∞ em $\mathbb{R}^2$. Além disso, para $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y) \overset{(29)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(x^4 + y^4 - 2\,x^2 - 2\,y^2\right) = 4\,x^3 - 4\,x \qquad (30)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y) \overset{(29)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(x^4 + y^4 - 2\,x^2 - 2\,y^2\right) = 4\,y^3 - 4\,y\,, \qquad (31)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\right] \overset{(30)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(4\,x^3 - 4\,x\right) = 12\,x^2 - 4\,, \qquad (32)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x\,,y) \overset{(31)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y)\right] \overset{(31)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(4\,y^3 - 4\,y\right) = 12\,y^2 - 4\,, \qquad (33)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\right] \overset{(30)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(4\,x^3 - 4\,x\right) = 0\,. \qquad (34)$$

Vamos procurar os pontos críticos da função $\underline{f}$, ou seja, $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, de modo que:

$$\begin{aligned}
(0\,,0) &= \nabla f(x\,,y) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\,,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y)\right) \\
&\overset{(30)\ \text{e}\ (31)}{=} \left(4\,x^3 - 4\,x\,, 4\,y^3 - 4\,y\right)\,,
\end{aligned}$$

ou seja, $$\begin{cases} 0 = 4\,x^3 - 4\,x = 4\,x\,(x-1)\,(x+1) \\ 0 = 4\,y^3 - 4\,y = 4\,y\,(y-1)\,(y+1) \end{cases},$$

ou ainda, $$\begin{cases} x = 0\,,1\,,-1 \\ y = 0\,,1\,,-1 \end{cases} \qquad (35)$$

que nos fornece as seguintes soluções:

$$\begin{array}{lll}
P_1 \doteq (0\,,0)\,, & P_2 \doteq (0\,,1)\,, & P_3 \doteq (0\,,-1)\,, \\
P_4 \doteq (1\,,0)\,, & P_5 \doteq (1\,,1)\,, & P_6 \doteq (1,-1)\,, \\
P_7 \doteq (-1\,,0)\,, & P_8 \doteq (-1\,,1) & P_9 \doteq (-1\,,-1)\,.
\end{array} \qquad (36)$$

A matriz hessiana associada à função $\underline{f}$, no ponto $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, será dada por:

$$Hess_f(x\,,y) \overset{(21)}{=} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x\,,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x\,,y) \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x\,,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x\,,y) \end{pmatrix}$$

$$\overset{(32)\,,(33)\ \text{e}\ (34)}{=} \begin{pmatrix} 12\,x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 12\,y^2 - 4 \end{pmatrix}. \qquad (37)$$

Logo o hessiano da função $\underline{f}$ em $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, será dado por:

$$H_f(x\,,y) \overset{(37)}{=} \begin{vmatrix} 12\,x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 12\,y^2 - 4 \end{vmatrix}$$

$$= 16\,\left(3\,x^2 - 1\right)\,\left(3\,y^2 - 1\right). \qquad (38)$$

Com o teste do hessiano (ou seja, o Teorema 0.2) podemos montar a seguinte tabela:

ponto $\underline{P}$	$H_f(P)$	$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P)$	Classificação de P	$f(P)$
$P_1 = (0\,,0)$	$16 > 0$	$-4 < 0$	máximo local	0
$P_2 = (0\,,1)$	$-32 < 0$		sela	-1
$P_3 = (0\,,-1)$	$-32 < 0$		sela	-1
$P_4 = (1,0)$	$-32 < 0$		sela	-1
$P_5 = (1\,,1)$	$64 > 0$	$8 > 0$	mínimo local	-2
$P_6 = (1\,,-1)$	$64 > 0$	$8 > 0$	mínimo local	-2
$P_7 = (-1\,,0)$	$-32 < 0$		sela	-1
$P_8 = (-1,1)$	$64 > 0$	$8 > 0$	mínimo local	-2
$P_9 = (-1\,,-1)$	$64 > 0$	$8 > 0$	mínimo local	-2

$\square$

Observação

Observe que, pelo item 1. do Teorema 0.2, o ponto $\underline{P_1}$ é um ponto de máximo local da função $\underline{f}$, mas não é um máximo global da função $\underline{f}$ em $\mathbb{R}^2$.
De fato pois, por exemplo,

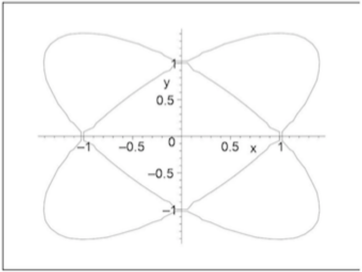
$$f(2\,,0) \overset{(29)}{=} 8 > 0 = f(0\,,0) = f(P_1)\,.$$

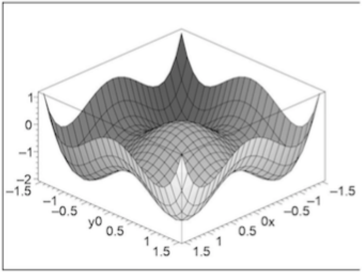
Porém, os pontos de mínimo locais, a saber

$$P_5\,, \quad P_6\,, \quad P_8 \quad e \quad P_9$$

são, na verdade, pontos de mínimo globais da função $\underline{f}$ em $\mathbb{R}^2$..
Para a verificação destes fatos veja as notas de aula.

À direita temos a representação geométrica do gráfico da função f e a à esquerda temos os pontos críticos da função f e a curva de nível -1 da função f (isto é, a curva de nível que contém todos os pontos de sela da função f).





Observação

O Teorema 0.2 *só é válido em* $\mathbb{R}^2$*, isto é, para funções a valores reais, de* **duas variáveis reais***. Situações mais gerais (funções a valores reais, de duas ou mais variáveis) são tratadas no Apêndice das notas de aula.*