Encontrando máximo (ou mínimo) global

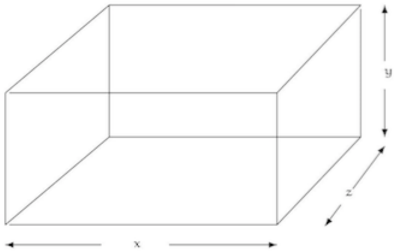
No Exemplo a seguir, o objetivo é encontrar o **mínimo global** da função no seu domínio.
Utilizaremos o teste do hessiano, visto anteriormente, para classificar o único ponto crítico da função envolvida, que será um ponto de **mínimo local**.
O trabalho maior será mostrar que esse ponto de mínimo local é, na verdade, um ponto de **mínimo global** da função no seu domínio.

Exemplo

Deseja-se construir uma caixa, sem tampa, com a forma de um paralelepípedo reto cujo volume é $V\ m^3$ fixado.
Determine as dimensões da caixa para que se gaste o mínimo de material possível, para construí-la.

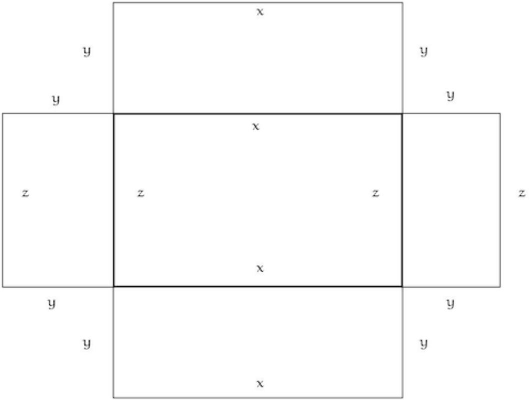
Resolução:

Denotemos por $\underline{x}$ e $\underline{z}$ as dimensões da base da caixa e por $\underline{y}$ a sua altura, todos estes elementos dados em metros (figura abaixo).



A área total da caixa, que indicaremos por $\underline{\mathcal{A}}$ será igual a área lateral, juntamente com a área da base, do paralelepípedo reto, ou seja, será dada por:

$$\mathcal{A} \doteq 2\,y\,x + 2\,y\,z\, + x\,z \quad \text{para } x\,,y\,,z > 0\,. \tag{1}$$



Como, para cada $x, y, z > 0$, temos que

$$V = x\,y\,z \tag{2}$$

é dado (volume de um paralelepípedo reto), segue que

$$z = \frac{V}{x\,y}\,, \quad \text{para cada} \quad x\,,y > 0\,. \tag{3}$$

Substituindo-se (3) em (1), obteremos

$$\mathcal{A}(x\,,y) = 2\,x\,y + 2\frac{V}{x} + \frac{V}{y}\,, \quad \text{para} \quad x\,,y > 0\,. \tag{4}$$

Notemos que a função $\underline{A}$ é de classe C^∞ no conjunto $\underline{\mathcal{R}}$, onde

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &\doteq \left\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2\;;\; x\,,y > 0\right\}\\ &= (0\,,\infty) \times (0\,,\infty)\,.\end{aligned} \tag{5}$$

Além disso, para cada $(x\,,y) \in \mathcal{R}$, teremos:

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x}(x\,,y) \stackrel{(4)}{=} 2\,y - 2\frac{V}{x^2}\,, \qquad \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial y}(x\,,y) \stackrel{(4)}{=} 2\,x - \frac{V}{y^2}\,, \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x^2}(x\,,y) \stackrel{(6)}{=} \frac{4\,V}{x^3}\,, \qquad \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial y^2}(x\,,y) \stackrel{(6)}{=} \frac{2\,V}{y^3}\,, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x\,\partial y}(x\,,y) \stackrel{\text{Teorema de Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x\,\partial y}(x\,,y) \stackrel{(6)}{=} 2 \tag{8}$$

Nosso problema se resume em achar o ponto de <u>**mínimo global**</u> da função <u>$\mathcal{A}$</u> no conjunto <u>$\mathcal{R}$</u>.

Observemos que a função $\underline{\mathcal{A}}$ é de classe C^∞ no conjunto $\underline{\mathcal{R}}$ mas o conjunto $\underline{\mathcal{R}}$ **<u>não</u>** é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^2$, pois **<u>não</u>** é nem um subconjunto fechado e nem é limitado de $\mathbb{R}^3$.
Logo **<u>não</u>** podemos garantir, até esse momento, que a função $\mathcal{A}$ tem um mínimo global no conjunto $\mathcal{R}$.
O que faremos é encontrar os pontos críticos da função $\underline{\mathcal{A}}$, no conjunto $\underline{\mathcal{R}}$, e mostrar que em um deles a função terá um mínimo global no conjunto $\underline{\mathcal{A}}$.

Vamos procurar os pontos críticos da função $\underline{\mathcal{A}}$ no conjunto $\underline{\mathcal{R}}$, isto é:

$$0 = \nabla A(x\,,y) = \left(\frac{\partial A}{\partial x}(x\,,y)\,,\,\frac{\partial A}{\partial y}(x\,,y)\right) \overset{(6)}{=} \left(2\,y - 2\,\frac{V}{x^2}\,,\,2\,x - \frac{V}{y^2}\right)\,,$$

$$\text{ou seja,}\quad \begin{cases} 2\,y - 2\,\dfrac{V}{x^2} = 0 \\[2ex] 2\,x - \dfrac{V}{y^2} = 0 \end{cases}\,,\quad \text{isto é,}\quad \begin{cases} y\,x^2 = V \\ 2\,x\,y^2 = V \end{cases}\,. \tag{9}$$

Com isto obteremos

$$x_o = \sqrt[3]{2\,V} \quad \text{e} \quad y_o = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}\,. \tag{10}$$

Logo, a função $\underline{\mathcal{A}}$ terá um único ponto crítico no conjunto $\underline{\mathcal{R}}$ e este ocorre no ponto

$$P_o \doteq \left(\sqrt[3]{2\,V}\,,\,\sqrt[3]{\frac{V}{4}}\right)\,. \tag{11}$$

Como $x_o\, y_o\, z_o \overset{(2)}{=} V$, de (10), segue que: $z_o = \sqrt[3]{2\,V}$. (12)

A matriz hessiana associada a função $\underline{\mathcal{A}}$ em $(x\,,y) \in \mathcal{R}$, será:

$$Hess_{\mathcal{A}}(x\,,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x^2}(x\,,y) & \dfrac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x\,\partial y}(x\,,y) \\ \dfrac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial y\,\partial x}(x\,,y) & \dfrac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial y^2}(x\,,y) \end{vmatrix} \overset{(7)\text{ e }(8)}{=} \begin{vmatrix} \dfrac{4\,V}{x^3} & 2 \\ 2 & \dfrac{2\,V}{y^3} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{8\,V^2}{x^3\,y^3} - 4\,. \qquad (13)$$

Assim: $Hess_{\mathcal{A}}(x_o\,,y_o) \overset{(11)}{=} Hess_{\mathcal{A}}\left(\sqrt[3]{2V}\,,\ \sqrt[3]{\dfrac{V}{4}}\right) \overset{(13)}{=} 12 > 0\,,$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x^2}(P_o) \overset{(11)}{=} \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x^2}\left(\sqrt[3]{2\,V}\,,\ \sqrt[3]{\frac{V}{4}}\right) \overset{(7)}{=} 2 > 0\,.$$

Logo, pelo teste do hessiano, podemos concluir que o ponto

$$P_o = \left(\sqrt[3]{2\,V} \,,\, \sqrt[3]{\frac{V}{4}} \right)$$

é um <u>**ponto de mínimo local**</u> da função $\underline{\mathcal{A}}$ no conjunto $\underline{\mathcal{R}}$.
Na verdade, mostraremos a seguir que o ponto $\underline{P_o}$ é um ponto de <u>**mínimo global**</u> da função $\underline{\mathcal{A}}$ no conjunto $\underline{\mathcal{R}}$.
Observemos que, para cada

$$y_1 > 0$$

fixado, a função $\mathcal{A}_{y_1} : (0\,,\infty) \to \mathbb{R}$, dada por

$$\mathcal{A}_{y_1}(x) \doteq \mathcal{A}(x\,,y_1) \overset{(4)}{=} 2\,x\,y_1 + 2\,\frac{V}{x} + \frac{V}{y_1}\,,\ \ x \in (0\,,\infty)\,, \qquad (14)$$

possui um (único) ponto de mínimo global no conjunto $\underline{(0\,,\infty)}$.

Para mostrarmos isto observemos que a função $\underline{\mathcal{A}_{y_1}}$ tem um único ponto crítico no conjunto $\underline{(0\,,\infty)}$.
De fato, pois para encontrar os pontos críticos da função $\underline{\mathcal{A}_{y_1}}$, basta encontrarmos $x \in (0\,,\infty)$ de modo que:

$$0 = {\mathcal{A}_{y_1}}'(x) \overset{(14)}{=} 2\,y_1 - 2\,\frac{V}{x^2} = 2\,\frac{y_1\,x^2 - V}{x^2}\,,$$

$$\text{o que implicará em:} \quad y_1\,x^2 - V = 0\,, \ \text{isto é,} \ \ x = \sqrt{\frac{V}{y_1}}\,. \tag{15}$$

Portanto, para cada $y_1 > 0$ fixado,

$$x_1 \doteq \sqrt{\frac{V}{y_1}} \in (0\,,\infty) \tag{16}$$

é o único ponto crítico da função $\underline{\mathcal{A}_{y_1}}$ no conjunto $\underline{(0\,,\infty)}$.

Notemos que, para cada $y_1 > 0$, temos que

$$\lim_{x \to 0^+} \mathcal{A}_{y_1}(x) \overset{(14)}{=} \lim_{x \to 0^+} \left(2\,x\,y_1 + 2\,\frac{V}{x} + \frac{V}{y_1} \right) \overset{\text{Cálculo I}}{=} +\infty\,,$$

$$\text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} \mathcal{A}_{y_1}(x) \overset{(14)}{=} \lim_{x \to \infty^+} \left(2\,x\,\underbrace{y_1}_{>0} + 2\,\frac{V}{x} + \frac{V}{y_1} \right) \overset{\text{Cálculo I}}{=} +\infty\,.$$

Portanto, para cada

$$y_1 > 0 \quad \text{fixado}\,,$$

podemos concluir que a função $\underline{\mathcal{A}_{y_1}}$ (que é diferenciável em $(0\,,\infty)$), terá um ponto de mínimo global (ou absoluto) da função $\underline{\mathcal{A}_{y_1}}$ no seu único ponto crítico, isto é, no ponto

$$x_1 \doteq \sqrt{\frac{V}{y_1}}\,.$$

Para cada

$$y_1 > 0 \quad \text{fixado}\,,$$

o valor do mínimo global da função $\underline{\mathcal{A}_{y_1}}$ em $\underline{(0\,,\infty)}$, que indicaremos por $\underline{m(y_1)}$, será dada por :

$$m(y_1) \doteq \mathcal{A}_{y_1}(x_1) \overset{(16)}{=} \mathcal{A}_{y_1}\left(\sqrt{\frac{V}{y_1}}\right) \overset{(14)}{=} \mathcal{A}\left(\sqrt{\frac{V}{y_1}}\,, y_1\right)$$

$$\overset{(4)}{=} 4\sqrt{V\,y_1} + \frac{V}{y_1}\,. \tag{17}$$

Com isto teremos que:

$$\mathcal{A}(x\,, y_1) \overset{(14)}{=} \mathcal{A}_{y_1}(x) \geq m(y_1)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (0\,,\infty)\,. \tag{18}$$

Por outro lado, a função $m : (0\,,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$m(y) \doteq \mathcal{A}_y(x_o) \overset{(14)}{=} 4\sqrt{V\,y} + \frac{V}{y}\,, \quad \text{para} \quad y \in (0\,,\infty) \qquad (19)$$

(que nos fornece o valor do mínimo global da função $\underline{\mathcal{A}_y}$ em $\underline{(0\,,\infty)}$), também possui um ponto de mínimo global em $\underline{(0\,,\infty)}$.
Observemos que a função $\underline{m}$, dada por (19), tem um único ponto crítico em $\underline{(0\,,\infty)}$.
De fato, um ponto crítico da função $\underline{m}$ em $\underline{(0\,,\infty)}$, ocorrerá quando:

$$0 = m'(y) \overset{(19)}{=} 2\sqrt{\frac{V}{y}} - \frac{V}{y^2}\,, \quad \text{ou seja,} \quad 2\sqrt{\frac{V}{y}} = \frac{V}{y^2}$$

$$\text{ou ainda,} \quad y^3 = \frac{V}{4}\,, \quad \text{implicando que} \quad y_1 \doteq \sqrt[3]{\frac{V}{4}} \qquad (20)$$

é o único ponto crítico da função $\underline{m}$ em $\underline{(0\,,\infty)}$.

Notemos que

$$\lim_{y\to 0^+} m(y) = \lim_{y\to 0^+} \left(4\sqrt{V\,y} + \frac{V}{y}\right) \overset{\text{Cálculo I}}{=} +\infty\,,$$

$$\text{e} \quad \lim_{y\to +\infty} m(y) = \lim_{y\to \infty^+} \left(4\sqrt{\underbrace{V}_{>0}\,y} + \frac{V}{y}\right) \overset{\text{Cálculo 1}}{=} +\infty\,.$$

Estes fatos, juntamente com o fato que a função $\underline{m}$ é diferenciável em $\underline{(0\,,\infty)}$, segue que seu ponto mínimo global ocorrerá no seu único ponto crítico, a saber em

$$y_1 = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}\,.$$

$$\text{Logo} \quad m(y) \geq m\,(y_1) \overset{(20)}{=} m\left(\sqrt[3]{\frac{V}{4}}\right)\,, \quad \text{para} \quad y \in (0\,,\infty)\,. \qquad (21)$$

Observemos que

$$y_1 \overset{(20)}{=} \sqrt[3]{\frac{V}{4}} \overset{(10)}{=} y_o \,, \tag{22}$$

$$x_1 \overset{(16)}{=} \sqrt{\frac{V}{y_1}} \overset{(20)}{=} \sqrt{\frac{V}{\sqrt[3]{\frac{V}{4}}}} = \sqrt[3]{2\,V} \overset{(20)}{=} x_o \,. \tag{23}$$

Assim, para $x\,, y \in (0\,,\infty)$, teremos

$$\mathcal{A}(x\,,y) \overset{(14)}{=} \mathcal{A}_y(x) \overset{(18)}{\geq} m(y) \overset{(21)}{\geq} m\left(\sqrt[3]{\frac{V}{4}}\right) \overset{(19),(22) \text{ e } (23)}{=} \mathcal{A}_{y_o}(x_o)$$

$$\overset{(14)}{=} A\left(\sqrt[3]{2\,V}\,,\, \sqrt[3]{\frac{V}{4}}\right). \tag{24}$$

Portanto, o ponto $P_o = \left(\sqrt[3]{2V}\,,\ \sqrt[3]{\frac{V}{4}} \right)$ será o ponto de mínimo global da função $\underline{\mathcal{A}}$ no conjunto $\underline{\mathcal{R}}$.
Finalmente, segue que de (24) e (3), que as dimensões da caixa de volume $\underline{V}$, que gastará menos papelão para ser construída serão:

$$x = \sqrt[3]{2\,V}\,, \qquad y = \sqrt[3]{\frac{V}{4}} \qquad \text{e} \qquad z = \sqrt[3]{2\,V}\,.$$

Observação

*Lembremos novamente que, apesar da função $\underline{\mathcal{A}}$, dada por (4), ser contínua no conjunto $\mathcal{R} \doteq (0, \infty) \times (0, \infty)$, este conjunto **não** é nem fechado, nem limitado em $\mathbb{R}^2$, ou seja, **não** é um conjunto compacto de $\mathbb{R}^2$. O que fizemos foi mostrar que o ponto de mínimo local da função $\underline{\mathcal{A}}$, dada por (4), obtido pelo teste do hessiano aplicado à função $\underline{\mathcal{A}}$ é, na verdade, um ponto mínimo global da função A no conjunto $\underline{\mathcal{R}}$.*