Soma de Riemann

Definição

Um conjunto formado por um número finito de pontos do intervalo $[a\,,b]$, *que indicaremos por:*

$$\mathcal{P} \doteq \{x_o\,, x_1\,, \cdots\,, x_n\}\,,$$

$$\text{onde: } \quad x_o \doteq a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n \doteq b\,,$$

será denominada **partição (ou divisão) do intervalo** $[a\,,b]$.
Neste caso, para cada $i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$, *definimos*

$$\Delta x_i \doteq x_i - x_{i-1}$$

e com isto diremos que **norma da partição** $\mathcal{P}$, *indicada por* $\|\mathcal{P}\|$, *será dada por:*

$$\|\mathcal{P}\| \doteq \max_{i\in\{1\,,2\,,\cdots\,,n\}} \{\Delta x_i\}\,.$$

Observação

Observemos que a norma da partição $\underline{\mathcal{P}}$ é comprimento do maior subintervalo determinado pelos elementos da partição $\underline{\mathcal{P}}$ (figura abaixo).

Seja $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada em $[a\,,b]$ e

$$\mathcal{P} \doteq \{x_o\,, x_1\,, \cdots\,, x_n\}$$

uma partição do intervalo $[a\,,b]$.
Para cada $i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$, escolhamos no subintervalo $[x_{i-1}\,,x_i]$, um ponto, que denotaremos por $\underline{\xi_i}$, isto, é,

$$\xi_i \in [x_{i-1}\,,x_i]\,.$$

Consideremos a seguinte soma (finita)

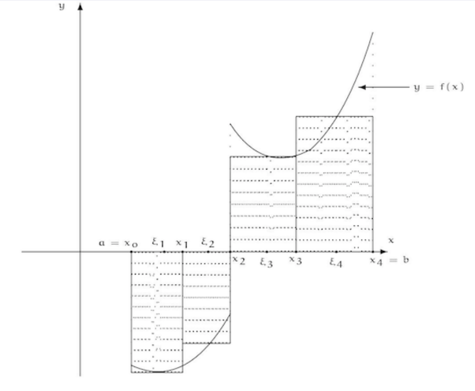
$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\,\Delta x_n\,. \quad (1)$$

Com isto podemos introduzir a:

Definição

A soma finita (1), *será dita* **soma de Riemann da função $\underline{f}$, associada a partição $\underline{\mathcal{P}}$ e aos pontos $\underline{\xi_i}$, para** $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

A figura ilustra a situação descrita acima:



Observação

1. *Vale observar que se a função $\underline{f}$ assumir valores negativos (como na figura acima), a soma de Riemann da função $\underline{f}$, associada partição $\underline{\mathcal{P}}$ e aos pontos $\underline{\xi_i}$, para cada $i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$* **<u>NÃO</u>** *nos fornecerá, uma aproximação da área da região plana limitada, delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função $\underline{f}$, das retas $x = a$, $x = b$ e do eixo Ox, pois a área de alguns dos sub-retângulos poderá* **<u>NÃO</u>** *ser, dada por*
$$f(\xi_i)\,\Delta x_i\,,$$
já que o número real $f(\xi_i)$ pode ser menor que zero.
Na situação da figura acima, isto acontece quando $i = 1$ ou $i = 2$, pois $f(\xi_i) < 0$, para $i \in \{1\,,2\}$.
2. *Se a função $\underline{f}$ é não negativa, a soma de Riemann acima, poderá ser uma aproximação para a área da região plana considerada, se a função $\underline{f}$ for "bem comportada", como veremos mais adiante.*

Integral definida

Definição

Seja $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ *uma função limitada. Diremos que a função* $\underline{f}$ *é* **integrável em** $[a\,,b]$, *se podemos encontrar* $L \in \mathbb{R}$, *talque, dado* $\varepsilon > 0$, *podemos encontrar* $\delta > 0$, *de modo que, para toda partição do intervalo* $[a\,,b]$, *indicada* $\mathcal{P} \doteq \{x_o = a\,, x_1\,, \cdots\,, x_n = b\}$,

$$\textit{satisfazendo: } \|\mathcal{P}\| < \delta$$

$$\textit{e escolha de pontos } \ \xi_i \in [x_{i-1}\,, x_i]\,, \quad \textit{para } \ i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}\,,$$

$$\textit{deveremos ter: } \left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i - L \right| < \varepsilon\,.$$

O número real L será dito **integral definida da função** $\underline{f}$ **no intervalo** $[a\,,b]$, *que será denotada por* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, *isto é,*

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq L\,.$$

Observação

- *A Definição acima nos diz que a função* $\underline{f}$ *é integrável no intervalo* $[a\,,b]$ *se, e somente se, podemos deixar a soma de Riemann da função* $\underline{f}$*, a associada à partição* $\mathcal{P}$ *e aos pontos* ξ_i*, para cada* $i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$*, tão próxima do número real* $\underline{L}$ *quanto se queira, desde que a norma da partição* $\underline{\mathcal{P}}$ *seja suficientemente pequena.*
- *Se a função* $\underline{f}$ *é integrável no intervalo* $[a\,,b]$ *então, da Definição acima, teremos:*

$$L = \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i\,,$$

ou ainda:
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i\,,$$

$$\textit{com} \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]\,, \quad \textit{para} \quad i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}\,,$$

e $\mathcal{P} \doteq \{x_o = a\,,x_1\,,\cdots\,,x_n = b\}$ *uma partição de* $[a\,,b]$.

Observação

- *Na notação da integral definida, isto é,* $\int_a^b f(x)\,dx$, *a função* $\underline{f}$ *será dita* **<u>integrando</u>**, *o número real* $\underline{a}$, *será dito* **<u>limite (ou extremo) inferior de integração</u>**, *o número real* $\underline{b}$, *será dito* **<u>limite</u>** **<u>(ou extremo) superior de integração</u>** *e o símbolo* $\int$, *será denominado* **<u>sinal de integração</u>**.
- *Notemos que se a função* $f : [a\,, b] \to \mathbb{R}$ *é* **<u>não-negativa e integrável</u>** *em* $[a\,, b]$, *então a integral definida* $\int_a^b f(x)\,dx$, *nos fornecerá o valor da área, que indicaremos por* $\underline{\mathcal{A}}$, *da região limitada, contida no plano* xOy, *delimitada pelas representações geométricas dos gráfico das função* $\underline{f}$, *das retas* $x = a$, $x = b$ *e do eixo* Ox, *ou seja,*
$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,dx \ \ u.a..$$

Observação

A integral definida introduzida na Definição acima é conhecida como **integral de Riemann, da função f em $[a,, b]$**.

Seja $f : [a\,, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a\,, b]$. Desta forma podemos o introduzir as seguintes notações:

Notação

$$\int_b^a f(x)\, dx \doteq -\int_a^b f(x)\, dx\,,$$
$$\int_a^a f(x)\, dx \doteq 0\,.$$

Para ilustrar temos o:

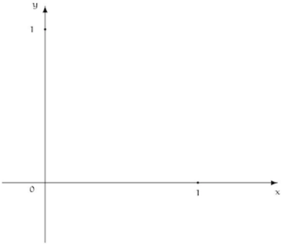
Exemplo

Seja $f : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ *a função, dada por*

$$f(x) \doteq \begin{cases} 1\,, & para \quad x = 0 \\ 0\,, & para \quad x \in (0\,,1] \end{cases} \quad . \tag{2}$$

Mostre que a função $\underline{f}$ *é integrável em* $[0\,,1]$ *e* $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 0\,.$

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é dada pela figura abaixo:



Resolução:

Seja $L \doteq 0$.

Se $\mathcal{P} \doteq \{x_o \doteq 0, x_1, \cdots, x_n \doteq 1\}$

é uma partição de $[0, 1]$ e $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, para $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$,

então deveremos ter: $\xi_i \neq 0$, para $i \in \{2, \cdots n\}$.

Assim a soma de Riemann da função $\underline{f}$, associada à partição $\underline{\mathcal{P}}$ e aos pontos ξ_i, para $i \in \{1, \cdots, n\}$, será dada por:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \overset{\text{para } i\in\{2,\cdots,n\}, \text{ temos } \xi_i\neq 0, \text{ logo } f(\xi_i)\overset{(2)}{=}0}{=} f(\xi_1)\,\Delta x_1 \,. \quad (3)$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, consideremos $\delta \doteq \varepsilon$, (4)

se $\|\mathcal{P}\| < \delta$ e $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, para $i \in \{1, \cdots, n\}$, (5) Assim:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i - L\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i - 0\right| \overset{(3)}{=} |f(\xi_1)\,\Delta x_1|$$

$$= |f(\xi_1)|\ \Delta x_1 \overset{|f(x)|\overset{(2)}{\leq}1}{\leq} 1\,\Delta x_1$$

$$\leq \max_{i\in\{1,\cdots,n\}}\{\Delta x_i\} = \|\mathcal{P}\| \overset{(5)}{<} \delta \overset{(4)}{=} \varepsilon\,,$$

mostrando que a função $\underline{f}$ é integrável em $[0\,,1]$ e além disso $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = L = 0$, completando a resolução.

$\square$

Condição suficiente para a existência da integral definida

Teorema

Seja $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $[a\,,b]$.
Então a função $\underline{f}$ *será integrável no intervalo* $[a\,,b]$, *ou seja, existe a integral definida* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Observação

A função dada por (2) *do Exemplo acima, mostra que a condição do Teorema acima* **<u>não é necessária</u>**, *já que a função do referido Exemplo,* **<u>NÃO</u>** *é contínua em* $[0\,,1]$, *mas é integrável em* $[0\,,1]$.

Definição

Uma partição $\mathcal{P} \doteq \{x_o = a\,, x_1\,, \cdots\,, x_n = b\}$ *do intervalo* $[a\,, b]$, *será dita* **partição regular do intervalo** $[a\,, b]$ *se*

$$x_i \doteq a + i\,\frac{b-a}{n}\,, \quad \textit{para} \quad i \in \{0\,, \cdots\,, n\}\,.$$

Observação

Se $\mathcal{P} \doteq \{x_o = a\,, x_1\,, \cdots\,, x_n = b\}$ *é uma partição regular do intervalo* $[a\,, b]$, *então os subintervalos* $[x_{i-1}\,, x_i]$, *para* $i \in \{1\,, 2\,, \cdots\,, n\}$, *terão o mesmo comprimento, pois*

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n}\,, \ \textit{para} \ \in \{1\,, \cdots\,, n\}$$

e a norma da partição será $\dfrac{b-a}{n}$,

$$\textit{ou seja,} \ \ \|\mathcal{P}\| = \frac{b-a}{n}\,.$$

Observação

Se a função $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ é integrável em $[a\,,b]$, então:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\,\frac{b-a}{n}\right)\,\frac{b-a}{n}\,. \tag{6}$$

Apliquemos as ideias acima ao:

Exercício

Seja $f : [1\,,3] \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) \doteq x^2\,, \quad \textit{para} \quad x \in [1\,,3]\,. \tag{7}$$

Mostre que a função $\underline{f}$ é integrável em $[1\,,3]$ e encontre $\displaystyle\int_1^3 x^2\,dx\,.$

Resolução: A função f, dada por (7), é contínua em $[1\,,3]$, assim o Teorema acima, garante que ela será uma função integrável em $[1\,,3]$.

Logo podemos utilizar relação (6), ou seja,

$$\int_1^3 x^2\,dx \overset{(7)}{=} \int_a^b f(x)\,dx \overset{(6)}{=} \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f\left(\underbrace{a + i\,\frac{b-a}{n}}_{\doteq\xi_i}\right)\underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\doteq\Delta x_i=\Delta x}$$

$$\overset{a\doteq1,b\doteq3,(7)}{=} \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \left(1 + i\,\frac{2}{n}\right)^2 \frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2}{n}\sum_{i=1}^n\left[\frac{n^2+4\,i\,n+4\,i^2}{n^2}\right]\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2}{n^3}\left[\sum_{i=1}^n n^2 + 4\,n\sum_{i=1}^n i + 4\sum_{i=1}^n i^2\right]\right\}. \qquad (8)$$

Como

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n\,(n+1)}{2} \qquad \text{e} \qquad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6}\,, \qquad (9)$$

teremos:

$$\int_1^3 x^2\,dx \overset{(8)}{=} \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2}{n^3}\left[n^2\sum_{i=1}^{n}1 + 4\,n\sum_{i=1}^{n}i + 4\sum_{i=1}^{n}i^2\right]\right\}$$

$$\overset{(9)}{=} \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2}{n^3}\left[n^2\,n + 4\,n\,\frac{n\,(n+1)}{2} + 4\,\frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6}\right]\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{26\,n^3 + 24\,n^2 + 4\,n}{3\,n^3}\right] \overset{\text{Exercício}}{=} \frac{26}{3}\,,$$

ou seja, $$\int_1^3 x^2\,dx = \frac{26}{3}\,, \tag{10}$$

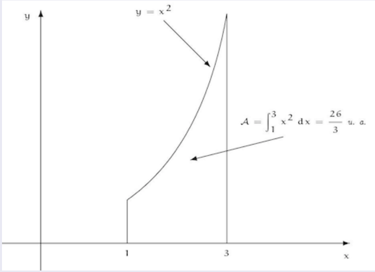
completando a resolução.

$\square$

Observação

Notemos que a função $\underline{f}$, dada por (8), é integrável e não negativa em $[1\,,3]$, assim a área, que indicaremos por $\underline{\mathcal{A}}$, da região limitada, contida no plano xOy, delimitada pelas representações geométricas dos gráficos da função $\underline{f}$, das retas $x = 1$, $x = 3$ e do eixo Ox (veja figura abaixo), será dada por:

$$\mathcal{A} = \int_1^3 x^2\, dx \overset{(10)}{=} \frac{26}{3} \ u.a.\,. \tag{11}$$



Propriedades da integral definida

Proposição

Sejam $f\,,g:[a\,,b]\to\mathbb{R}$ *funções integráveis em* $[a\,,b]$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $c\,,d\in[a\,,b]$. *Então:*

- *a função* $(\alpha\cdot f):[a\,,b]\to\mathbb{R}$ *é integrável em* $[a\,,b]$ *e*

$$\int_a^b(\alpha\cdot f)(x)\,dx=\alpha\int_a^b f(x)\,dx\,.;$$

- *as funções* $(f\pm g):[a\,,b]\to\mathbb{R}$ *é integrável em* $[a\,,b]$ *e*

$$\int_a^b(f\pm g)(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx\,;$$

Proposição

- *as restrições da função $\underline{f}$ aos intervalos $[a\,,c]$ e $[c\,,b]$, serão funções integráveis em $[a\,,c]$ e $[c\,,b]$, respectivamente.* e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,;$$

- *as restrições da função $\underline{f}$ aos intervalos com extremos em $c\,,d$ e $\underline{e}$, serão funções integráveis nos respectivos intervalos e*

$$\int_c^d f(x)\,dx = \int_c^e f(x)\,dx + \int_e^d f(x)\,dx\,;$$

- *a função $h:[a\,,b]\to\mathbb{R}$, dada por $h(x)\doteq C$, para $x\in[a\,,b]$, é integrável em $[a\,,b]$ e*

$$\int_a^b h(x)\,dx = C\,(b-a)$$

Proposição

- *se* $f(x) \leq g(x)$, *para* $x \in [a\,,b]$, *então*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx\,;$$

- *se existem* $m\,,M \in \mathbb{R}$, *tais que*
  $m \leq f(x) \leq M\,, \quad para \quad x \in [a\,,b,$ *então*

$$m\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M\,(b-a)\,;$$

- *a função* $|f| : [a\,,b] \to \mathbb{R}$, *dada por*
  $|f|(x) \doteq |f(x)|\,,\,, \quad para \quad x \in [a\,,b]\,,$ *é integrável em* $[a\,,b]$ *e*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx\,..$$

Teorema do valor médio para integral definida

Teorema

Seja $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $[a\,,b]$*.*
Então podemos encontrar $x_o \in [a\,,b]$*, tal que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x_o)\,(b-a)\,. \tag{12}$$

Demonstração:

Como, por hipótese, a função $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a\,,b]$, de um resultado da disciplina de Cálculo 1, segue que existem $s_o\,,t_o \in [a\,,b]$ tal que

$$f(s_o) = m \doteq \min_{x\in[a\,,b]} f(x) \quad \text{e} \quad M \doteq \max_{x\in[a\,,b]} f(x) = f(t_o)\,, \tag{13}$$

ou seja, $$m \leq f(x) \leq M\,, \quad \text{para} \quad x \in [a\,,b]\,. \tag{14}$$

Logo, do penúltimo item da Proposição acima, segue que

$$\underbrace{m}_{\overset{(13)}{=} f(s_o)} (b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \underbrace{M}_{\overset{(13)}{=} f(t_o)} (b-a)\,. \tag{15}$$

Dividindo-se as desigualdades (15) acima por $(b-a) > 0$, obteremos

$$f(s_o) \overset{(13)}{=} m \leq \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leq M \overset{(13)}{=} f(t_o)\,. \tag{16}$$

Logo, do Teorema do valor intermediário (visto na disciplina de Cálculo 1), segue que existe

$x_o \in [s_o\,, t_o] \subseteq [a\,, b]\,,$ de modo que

$$f(x_o) = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}\,, \quad \text{ou seja,} \quad \int_a^b f(x)\,dx = f(x_o)(b-a)\,,$$

como queríamos demonstrar.