Extremos globais de funções conjuntos fechadas e limitadas

Nos Exemplos a seguir faremos uso do

Teorema

Seja $K \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$.
Se a função $f : K \to \mathbb{R}$ for uma função contínua no conjunto $\underline{K}$, então existem $P_1\,, P_2 \in K$, de modo que

$$f(P_1) \leq f(P) \leq f(P_2)\,, \quad para \quad P \in K\,. \tag{1}$$

Em outras palavras, o ponto $\underline{P_1}$ será um ponto de mínimo global da função $\underline{f}$ no conjunto $\underline{K}$ e o ponto $\underline{P_2}$ será um ponto de máximo global da função $\underline{f}$ no conjunto $\underline{K}$.

Observação

- *Se função f, noTeorema acima, também possuir derivadas parciais de 1.a ordem no interior de K, para localizar os pontos de máximo e mínimo globais da função f, começaremos procurando os pontos críticos da função $\underline{f}$ no interior de $\underline{K}$ e comparar com os valores de máximo e mínimo globais da função $\underline{f}$ sobre a fronteira do conjunto $\underline{K}$.*
- *Assim, bastará encontrar os valores da função em todos os pontos críticos que pertencem ao interior do conjunto $\underline{K}$ e os extremos globais da restrição da função $\underline{f}$ a fronteira de $\underline{K}$. O maior entre os valores acima será o valor máximo global da função $\underline{f}$ no conjunto $\underline{K}$ e o menor valor acima será o valor mínimo global da função $\underline{f}$ no conjunto $\underline{K}$.*

continuando...

Observação

- *Notemos que* **não** *há necessidade de utilizarmos o teste do hessiano ou dos autovalores nos pontos críticos encontrados acima, pois estaremos interessados em localizar os pontos de* **máximo e mínimo globais** *da função f no conjunto K.*
- *Enfatizamos também que podemos ter extremos globais da função f em K, ocorrendo na fronteira do conjunto K e assim estes extremos* **não** *serão pontos críticos da função f no interior do conjunto K, como veremos em exemplos a seguir.*

Começaremos pelo:

Exemplo

Determine os extremos globais da função $f : K \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x\,,y) \doteq x^3 + y^3 - 3\,x - 3\,y\,,\ \text{para cada}\ \ (x\,,y) \in K\,, \qquad (2)$$

onde o conjunto K, é dado por:

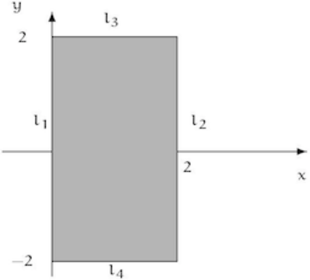
$$K \doteq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \in [0,2], y \in [-2,2]\right\} = [0,2] \times [-2,2]. \qquad (3)$$

Resolução: notemos que o conjunto $\underline{K}$ é um subconjunto limitado e fechado em $\mathbb{R}^2$ (exercício).

Além disso, notemos que a função $\underline{f}$ é de classe C^∞ no conjunto $\underline{K}$ (pois é uma função polinomial), em particular, contínua em no conjunto $\underline{K}$.

Logo, de um resultado anterior, segue que a função $\underline{f}$ atinge máximo e mínimo globais no conjunto $\underline{K}$.

A região $\underline{K}$ é o retângulo ilustrado na figura abaixo.



Vamos procurar os pontos críticos da função $\underline{f}$ no interior no conjunto $\underline{K}$, que denotamos por $\overset{\circ}{K}$.
Notemos que

$$\overset{\circ}{K} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x \in (0,2), y \in (-2,2)\right\} = (0,2) \times (-2,2) \,. \tag{4}$$

Observemos também que, para $(x\,,y) \in \overset{\circ}{K}$, teremos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y) \overset{(2)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left[x^3 + y^3 - 3\,x - 3\,y\right] = 3\,x^2 - 3\,, \tag{5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y) \overset{(2)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left[x^3 + y^3 - 3\,x - 3\,y\right] = 3\,y^2 - 3\,, \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y\,, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) \overset{\text{T. Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right](x,y) \overset{(7)}{=} 0. \tag{8}$$

Notemos que $(x\,,y) \in \overset{\circ}{K}$ será ponto crítico da função $\underline{f}$ se, e somente, se:

$$(0,0) = \nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,,\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) \overset{(8),(6)}{=} \left(3x^2-3, 3y^2-3\right),$$

ou seja, $\begin{cases} 3\,x^2 - 3 = 0 \\ 3\,y^2 - 3 = 0 \end{cases}$, ou ainda, $\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$. (9)

Logo, de (9), os pontos críticos da função $\underline{f}$ no conjunto $\underline{\overset{\circ}{K}}$ serão:

$$P_1 \doteq (1\,,-1) \in \overset{\circ}{K} \quad \text{e} \quad P_2 \doteq (1\,,1) \in \overset{\circ}{K}\,. \tag{10}$$

Observação

Observemos que

$$(-1\,,1) \notin \overset{\circ}{K} \quad e \quad (-1\,,-1)) \notin \overset{\circ}{K}\ .$$

Logo este dois pontos **<u>não</u>** *são pontos críticos da função* $\underline{f}$ *no conjunto* $\underline{\overset{\circ}{K}}$ *(na verdade, não pertencem nem mesmo pertecem ao próprio conjunto* $\underline{K}$*).*

Com isto teremos:

P	$(x\,,y)$	no interior de $\underline{K}$	$f(P)$ (veja (2))
P_1	$(1\,,-1)$	ok	0
P_2	$(1\,,1)$	ok	-4
	$(-1\,,1)$	não	não interessa
	$(-1\,,-1)$	não	não interessa

(11)

Desse modo, deveremos levar em conta apenas os pontos P_1 e P_2 (pois somente estes pertencem ao interior de K).
Passemos agora à análise dos valores de máximo e mínimos da restrição da função $\underline{f}$ à fronteira do conjunto $\underline{K}$.
Dividiremos a fronteira do conjunto $\underline{K}$ em quatro conjuntos (a saber, quatro intervalos), cada qual contemplando um lado do retângulo dado pela figura acima (que é a representação geométrica do conjunto $\underline{K}$).
Notemos que a fronteira do conjunto $\underline{K}$, que será denotada por ∂K é dada por:

$$\partial K = l_1 \cup l_2 \cup l_3 \cup l_4, \tag{12}$$

onde l_1, l_2, l_3 e l_4 são como na figura acima.

1.o caso: encontremos o máximo da restrição da função $\underline{f}$ ao conjunto

$$\ell_1 \doteq \{(0\,,y) \in \mathbb{R}^2\,;\; y \in [-2\,,2]\} = \{0\} \times [-2\,,2]\,. \tag{13}$$

Neste caso, a restrição da função $\underline{f}$ ao conjunto $\underline{l_1}$, nos fornecerá a função $g_1 : [-2\,,2] \to \mathbb{R}$, dada por

$$g_1(y) \doteq f(0\,,y) \overset{(2)\,,\text{ com } x=0}{=} y^3 - 3\,, \quad \text{para} \quad y \in [-2\,,2]\,. \tag{14}$$

Encontremos o máximo e o mínimo globais da função $\underline{g_1}$ no intervalo fechado $[-2\,,2]$ (que existem pois a função $\underline{g_1}$ é contínua no intervalo fechado e limitado $[-2\,,2]$) utilizando as técnicas desenvolvidas no Cálculo I.

Para isto, comecemos, encontrando os pontos críticos da função $\underline{g_1}$ no intervalo aberto $(-2\,,2)$.

Como a função $\underline{g_1}$, dada por (14), é diferenciável o intervalo aberto $(-2\,,2)$, seus pontos críticos ocorrerão somente nos pontos onde a sua derivada é zero, ou seja,

$$y \in (-2,2)\,, \quad \text{tais que} \quad 0 = g_1{}'(y) = 0 \overset{(14)}{=} 3\,y^2 - 3\,,$$

$$\text{isto implicará que} \quad y_1 \doteq -1 \in (-2\,,2) \ \text{ e } \ y_2 \doteq 1 \in (-2\,,2)\,, \quad (15)$$

serão os únicos pontos críticos da função $\underline{g_1}$, que pertencem ao intervalo aberto $(-2\,,2)$.

Logo, dos fatos acima e de (14), deveremos levar em conta o valor da função $\underline{f}$ nos pontos

$$P_3 \doteq (0\,,-1) \ \text{ e } \ P_4 \doteq (0\,,1)\,, \qquad (16)$$

$$\text{logo} \quad f(0,-1) = g_1(-1) = 2 \ \text{ e } \ f(0,1) = g_1(1) = -2. \qquad (17)$$

Finalmente, devemos calcular o valor da função $\underline{g_1}$ nos extremos do intervalo $[-2\,,2]$, isto é, nos pontos

$$y_3 \doteq -2 \quad \text{e} \quad y_4 \doteq 2\,,$$

que, por (14), correspondem a levar em conta o valor da função $\underline{f}$ nos pontos:

$$P_5 \doteq (0\,,-2) \quad \text{e} \quad P_6 \doteq (0\,,2)\,. \tag{18}$$

obtendo-se também os valores

$$f(0,-2) = g_1(-2) = -2 \quad \text{e} \quad f(0,2) = g_1(2) = 2. \tag{19}$$

2.o caso: sobre o conjunto

$$\ell_2 \doteq \{(2\,,y)\in\mathbb{R}^2\,;\,y\in[-2\,,2]\} = \{2\}\times[-2\,,2]\,. \qquad (20)$$

Agiremos de modo semelhante ao 1.o caso.
Neste caso, a restrição da função $\underline{f}$ ao conjunto $\underline{l_2}$, nos fornecerá a função $g_2:[-2\,,2]\to\mathbb{R}$, dada por

$$g_2(y)\doteq f(2\,,y)\overset{(2)}{=}2+y^3-3\,y\,,\quad \text{para}\quad -y\in[-2\,,2]\,. \qquad (21)$$

Notemos a seguinte relação entre $\underline{g_1}$ e $\underline{g_2}$ (veja (14) e (21))

$$g_2 = 2 + g_1\,,$$

obteremos os mesmos valores para $\underline{y}$ que do 1.o caso, porém lembremos que, neste caso, teremos

$$x = 2\,,$$

ou seja, deveremos levar em conta o valor da função $\underline{f}$ nos pontos

$$P_7\doteq(2\,,-1),\ \ P_8\doteq(2\,,1)\,,\ \ P_9\doteq(2\,,-2)\ \text{ e }\ P_{10}\doteq(2\,,2)\,. \quad (22)$$

$$f(2\,,-1)\overset{(21)}{=}g_2(-1)=4\overset{(21)}{=}f(2\,,2)\overset{(21)}{=}g_2(2)\,,$$

$$f(2\,,1)\overset{(21)}{=}g_2(1)=0=f(2\,,-2)\overset{(21)}{=}g_2(-2). \qquad (23)$$

3.o caso: sobre o conjunto

$$\ell_3 \doteq \left\{(x\,,2) \in \mathbb{R}^2\,;\, x \in [0\,,2]\right\} = [0\,,2] \times \{2\}\,. \qquad (24)$$

Neste caso, a restrição da função $\underline{f}$ ao conjunto $\underline{l_3}$, nos fornecerá a função $g_3 : [0\,,2] \to \mathbb{R}$, dada por

$$g_3(x) \doteq f(x\,,2) \overset{(2)}{=} x^3 - 3\,x + 2\,, \quad \text{para} \quad x \in [0\,,2]\,. \qquad (25)$$

Encontremos o máximo e o mínimo globais da função $\underline{g_3}$ no intervalo fechado e limitado $[0\,,2]$ (que existe pois a função $\underline{g_3}$ é contínua em $[0\,,2]$, e este é um subconjunto limitado e fechado de $\mathbb{R}$) utilizando, novamente, as técnicas desenvolvidas na disciplina de Cálculo I.

Para isto, comecemos, encontrando os pontos críticos da função $\underline{g_3}$ no intervalo aberto $(0\,,2)$.
Como a função $\underline{g_3}$ é diferenciável no intervalo aberto $(0\,,2)$, seus pontos críticos ocorrerão somente nos pontos onde a derivada é zero, ou seja,

$$x \in (0\,,2)\,, \quad \text{tais que} \quad 0 = g_3{}'(x) \stackrel{(25)}{=} 3\,x^2 - 3\,,$$
$$\text{isto implicará que} \quad x_1 \doteq -1 \notin (0\,,2) \quad \text{e} \quad x_2 \doteq 1 \in (0\,,2)\,, \tag{26}$$

ou seja, o único ponto crítico da função $\underline{g_3}$, que pertence ao intervalo aberto $(0\,,2)$ será

$$x = 1\,.$$

Assim, baseados nas considerações acima, deveremos que levar em conta o valor da função $\underline{f}$ no ponto

$$P_{11} \doteq (1\,,2)\,. \tag{27}$$

Finalmente, devemos calcular o valor da função $\underline{g_3}$ nos extremos do intervalo $[0\,,2]$, isto é, nos pontos

$$x_3 \doteq 0 \quad \text{e} \quad x_4 \doteq 2\,,$$

ou seja, precisaremos levar em conta o valor da função $\underline{f}$ nos pontos:

$$P_{12} \doteq (0\,,2) \overset{(18)}{=} P_6 \quad \text{e} \quad P_{13} \doteq (2\,,2) \overset{(22)}{=} P_{10}\,. \tag{28}$$

Ficamos então com os seguintes valores:

$$\begin{aligned} & f(1\,,2) \overset{(25)}{=} g_3(1) = 0,\;\; f(0\,,2) \overset{(25)}{=} g_3(0) = 2 \\ & \text{e} \;\; f(2\,,2) \overset{(25)}{=} g_3(2) = 4. \end{aligned} \tag{29}$$

Para finalizar temos o:

4.o caso: sobre o conjunto

$$\ell_4 \doteq \{(x\,,-2) \in \mathbb{R}^2\,;\, x \in [0\,,2]\} = [0\,,2] \times \{-2\}\,. \tag{30}$$

Neste caso, a restrição da função f ao conjunto l_4, nos fornecerá a função $g_4 : [0\,,2] \to \mathbb{R}$, dada por

$$g_4(x) \doteq f(x\,,-2) \overset{(2)}{=} x^3 - 3\,x - 22\,, \quad \text{para} \quad x \in [0\,,2]\,. \tag{31}$$

Temos a seguinte relação entre as funções g_3 e g_4 (veja (25) e (31))

$$g_2 = 2 + g_1\,,$$

obtemos os mesmos valores do 3.o caso, porém lembremos que, neste caso, teremos

$$y = -2\,,$$

ou seja, deveremos levar em conta o valor da função f nos seguintes pontos:

$$P_{14} \doteq (1\,,-2)\,,\ P_{15} \doteq (0\,,-2) \overset{(18)}{=} P_5$$
$$\text{e} \quad P_{16} \doteq (2\,,-2) \overset{(22)}{=} P_9\,. \tag{32}$$

Resumindo, os pontos, e respectivos valores da função $\underline{f}$ nos mesmos, que nos interessam estão na seguinte tabela:

P_i	(x, y)	valor de $f(x, y)$
P_1	$(1, -1)$	0
P_2	$(1, 1)$	-4
P_3	$(0, -1)$	2
P_4	$(0, 1)$	-2
P_5	$(0, -2)$	-2
P_6	$(0, 2)$	2
P_7	$(2, -1)$	4
P_8	$(2, 1)$	0
P_9	$(2, -2)$	0
P_{10}	$(2, 2)$	4
P_{11}	$(1, 2)$	0
P_{14}	$(1, -2)$	-4

Para obtermos o máximo global da função $\underline{f}$ basta encontrar o maior valor da função $\underline{f}$ na lista acima, cujo o valor $\underline{\ 4}$ (coluna à direita).
Este valor ocorrerá nos pontos

$$P_7 = (2\,,-1) \quad \text{e} \quad P_{10} = (2\,,2)\,,$$

ambos pertencentes a fronteira do conjunto $\underline{K}$, ou seja, os pontos máximo global da função $\underline{f}$ no conjunto compacto $\underline{K}$ ocorrerão nos pontos

$$P_7 = (2\,,-1)\,,\; P_{10} = (2\,,2) \in \partial K\,. \tag{33}$$

Para obtermos o mínimo global da função $\underline{f}$ basta encontrarmos o menor valor da função $\underline{f}$ na lista acima, que será o valor $\underline{\ -4}$ (coluna à direita) e este valor ocorrerá nos pontos

$$P_2 = (1\,,1) \in \overset{\circ}{K} \quad \text{e} \quad P_{14} = (1\,,-2) \in \partial K\,,$$

ou seja, os pontos mínimo global da função $\underline{f}$ no conjunto limitado e fecahdo $\underline{K}$ ocorrerão nos pontos

$$P_2 = (1\,,1) \in \overset{\circ}{K} \quad \text{e} \quad P_{14} = (1\,,-2) \in \partial K\,. \tag{34}$$

Conclusão: a função $\underline{f}$ tem dois pontos de máximo globais no conjunto limitado e fechaod $\underline{K}$, que ocorrem nos pontos

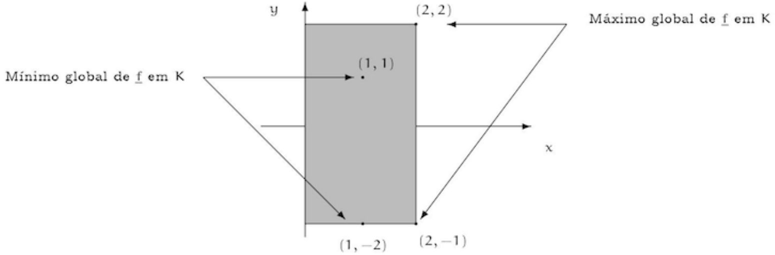
$$(2\,,-1) \quad \text{e} \quad (2\,,2)\,,$$

que estão na fronteira do conjunto $\underline{K}$, cujo valor de máximo global da função $\underline{f}$ será $\underline{4}$.

Além disso, a função $\underline{f}$ tem dois pontos de mínimo globais no conjunto limitado e fechado $\underline{K}$, que ocorrem nos pontos

$$(1\,,1) \quad \text{e} \quad (1\,,-2)\,,$$

sendo que o primeiro pertence ao interior do conjunto $\underline{K}$ e o segundo pertence a fronteira do conjunto $\underline{K}$, cujo valor de mínimo global da função $\underline{f}$ será $\underline{-4}$ (figura abaixo).



Podemos aplicar as mesmas técnicas ao

Exemplo

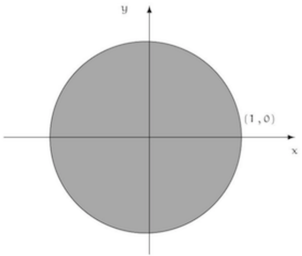
Determine os extremos globais da função $f : K \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x\,,y) \doteq x\,y\,, \text{ para cada } (x\,,y) \in K\,, \tag{35}$$

$$\text{onde } K \doteq \left\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2 + y^2 \leq 1\right\}\,. \tag{36}$$

Resolução: semelhante ao Exemplo acima, observemos que o conjunto $\underline{K}$ é um subconjunto limitado e fechado de $\mathbb{R}^2$, pois é uma bola fechada de $\mathbb{R}^2$ (exercício).
Notemos também que a função $\underline{f}$ é de classe C^∞ no conjunto $\underline{K}$ (pois é uma função polinomial em $\mathbb{R}^2$), em particular, será uma função contínua no conjunto $\underline{K}$.
Logo, de um resultado anterior, segue que a função $\underline{f}$ atinge máximo e mínimo globais no conjunto $\underline{K}$.

Notemos que o conjunto $\underline{K}$ é o círculo de centro na origem e raio igual a $\underline{1}$ (figura abaixo).



Notemos que, para cada $(x\,,y) \in \overset{\circ}{K}$, teremos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y) \overset{(35)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\,[x\,y] = y \tag{37}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y) \overset{(35)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\,[x\,y] = x\,. \tag{38}$$

Encontremos os pontos críticos da função $\underline{f}$ no interior do conjunto $\underline{K}$, isto é, os pontos do interior do conjunto $\underline{K}$, onde o gradiente da função $\underline{f}$ é igual a zero, ou seja,

$$(0\,,0) = \nabla f(x\,,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\,,\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y)\right) \overset{(37)\text{ e }(38)}{=} (y\,,x)\,,$$

ou seja, $\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$,

isto é, o único ponto crítico de $\underline{f}$ em $\underline{\overset{\circ}{K}}$, será: $P_1 \doteq (0\,,0)$ (39)

que pertence ao interior do conjunto $\underline{K}$ (é o centro do referido círculo).
Assim teremos que levar em conta o valor da função $\underline{f}$ no ponto

$$P_1 \doteq (0,0). \tag{40}$$

$$\text{isto é,} \quad f(0,0) = 0\,. \tag{41}$$

Encontremos os valores de máximo e mínimo globais da restrição da função $\underline{f}$ à fronteira do conjunto $\underline{K}$.
Observemos que a fronteira do conjunto $\underline{K}$, é a circunferência de centro em $(0\,,0)$ e raio igual a $\underline{1}$, isto é:

$$\partial K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\right\} = \left\{(\cos(t), \operatorname{sen}(t)); t \in [0, 2\pi]\right\}. \tag{42}$$

A função a ser considerada será a função $g : [0\,,2\,\pi] \to \mathbb{R}$, dada por

$$\begin{aligned} g(t) &\doteq f[\cos(t)\,, \operatorname{sen}(t)] \overset{(35)}{=} \cos(t)\, \operatorname{sen}(t) \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\,t)\,, \quad \text{para} \quad t \in [0\,,2\,\pi]\,. \end{aligned} \tag{43}$$

Observemos que a função $\underline{g}$ é contínua em $[0\,,2\,\pi]$, que é um subconjunto limitado e fechado de $\mathbb{R}$, logo sabemos que ela deverá assumir valor máximo e mínimo globais no intervalo $[0\,,2\,\pi]$.

Para encontrar esse extremos globais da função $\underline{g}$ no intervalo $[0\,,2\,\pi]$, basta aplicarmos as técnicas desenvolvidas na disciplina de Cálculo I.
Notemos que os pontos críticos da função $\underline{g}$ em $(0\,,2\pi)$, ocorrerão (a função é diferenciável no intervalo aberto $(0\,,2\,\pi)$) onde a derivada é igual a zero, isto é:

$$0 = g\,'(t) \overset{(43)}{=} \cos(2\,t)\,,$$
$$\text{ou seja:}\quad t_1 \doteq \frac{\pi}{4}\,,\ t_2 \doteq \frac{3\pi}{4}\,,\ t_3 \doteq \frac{5\pi}{4}\ \text{ e }\ t_4 \doteq \frac{7\pi}{4}\,. \qquad (44)$$

Notemos que todos os pontos acima, pertencentes ao intervalo aberto $(0\,,2\,\pi)$.

Assim, baseado nas considerações acima, teremos que levar em conta o valor da função $\underline{f}$ nos seguintes pontos

$$P_2 \doteq \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$P_3 \doteq \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$P_4 \doteq \left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$P_5 \doteq \left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

ou seja: $P_2 \doteq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $P_3 \doteq \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$P_4 \doteq \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{e} \quad P_5 \doteq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right). \tag{45}$$

Com isto temos que

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) \overset{(43)}{=} \frac{1}{2} \overset{(43)}{=} g\left(\frac{5\pi}{4}\right) \quad \text{e} \quad g\left(\frac{3\pi}{4}\right) \overset{(43)}{=} -\frac{1}{2} \overset{(43)}{=} g\left(\frac{7\pi}{4}\right).$$

Além do mais, temos que considerar os valores da função $\underline{g}$ nos extremos do intervalo $[0\,,2\,\pi]$, isto é, teremos que levar em conta o valor da função $\underline{f}$ nos seguintes pontos

$$\begin{aligned} P_6 &\doteq (\cos(0)\ ,\ \operatorname{sen}(0)) = (1\,,0)\,,\\ P_7 &\doteq (\cos(2\,\pi)\ ,\ \operatorname{sen}(2\,\pi)) = (1\,,0)\\ &= P_6\,, \end{aligned}$$

ou seja, no ponto: $$P_6 \doteq (1\,,0)\,. \tag{46}$$

Resumindo, os pontos, e respectivos valores da função $\underline{f}$ nos mesmos, que nos interessam estão na seguinte tabela:

P_i	$(x\,,y)$	valor de $f(x\,,y)$
P_1	$(0\,,0)$	0
P_2	$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\dfrac{1}{2}$
P_3	$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$-\dfrac{1}{2}$
P_4	$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\dfrac{1}{2}$
P_5	$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$-\dfrac{1}{2}$
P_6	$(1\,,0)$	0

Para obtermos o máximo global da função $\underline{f}$, basta encontrar o maior valor da função $\underline{f}$ na lista acima, que é o valor $\dfrac{1}{2}$ (coluna à direita) e este valor ocorrerá nos pontos

$$P_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{e} \quad P_4 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

ambos pertencentes a fronteira do conjunto $\underline{K}$, ou seja, os pontos máximo global da função $\underline{f}$ no conjunto compacto $\underline{K}$ ocorrerão nos pontos

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \in \partial K\,. \tag{47}$$

Para obtermos o mínimo global da função f basta encontrar o menor valor da função f na lista acima, que será o valor $-\dfrac{1}{2}$ (coluna à direita) e este valor ocorrerá nos pontos

$$P_3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{e} \quad P_5 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

ambos pertencentes a fronteira do conjunto K, ou seja, os pontos mínimo global da função f no conjunto limitado e fechado K ocorrerão nos pontos

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \in \partial K \,. \tag{48}$$

Reunindo os resultados encontrados no interior e na fronteira de K vemos que o valor de máximo global da função $\underline{f}$ em K é $1/2$ (pois é o maior valor em (1)-(2)-(3)) e o valor de mínimo global da função $\underline{f}$ em K é $-1/2$ (pois é o menor valor em (1)-(2)-(3)).
O valor de máximo da função $\underline{f}$ em K é atingido nos pontos referentes aos valores de $t = \dfrac{\pi}{4}$ e $t = \dfrac{5\pi}{4}$ que correspondem aos pontos

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{e} \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

respectivamente.
O valor de mínimo da função $\underline{f}$ em K é atingido nos pontos referentes aos valores de $t = \dfrac{3\pi}{4}$ e $t = \dfrac{7\pi}{4}$ que correspondem aos pontos

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

respectivamente.

Todos estes pontos se encontram na fronteira de K, ou seja, os valores de máximo e de mínimo globais da função $\underline{f}$ em K são atingidos em pontos que estão na fronteira de K.
A figura abaixo ilustrar a situação descrita acima.