Multiplicadores de Lagrange: problema com um vínculo

Suponhamos que $f\,, g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funções a valores reais, de duas variáveis reais, definidas em um subconjunto aberto $\underline{A}$, de $\mathbb{R}^2$ e de classe C^1 no conjunto $\underline{A}$.
O problema que passaremos a estudar será o de encontrar os extremos (máximo e/ou mínimo) da função $\underline{f}$, quando esta está sujeita à uma restrição do tipo

$$g(x\,,y) = 0\,, \quad \text{para} \quad (x\,,y) \in A\,, \tag{1}$$

ou seja, encontrar os extremos da função $\underline{f}$, para pontos domínio da função $\underline{f}$, que estão sobre a curva de nível zero da função $\underline{g}$, isto é, encontrar os extremos (globais) da função

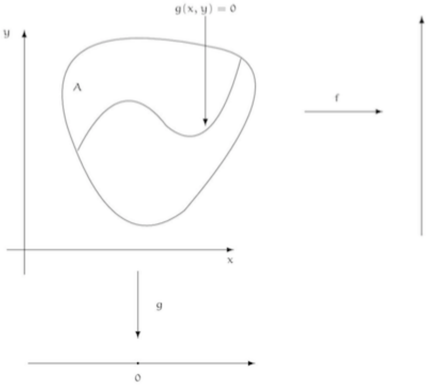
$$f : \{(x\,,y) \in A\,;\ g(x\,,y) = 0\} \to \mathbb{R}\,, \tag{2}$$

ou ainda, queremos encontrar o(s) ponto(s) $(x\,,y) \in A$ que satisfaz(em) à condição

$$g(x\,,y) = 0\,,$$

denominado **vínculo** que maximizem ou minimizem os valores da função $\underline{f}$.

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima



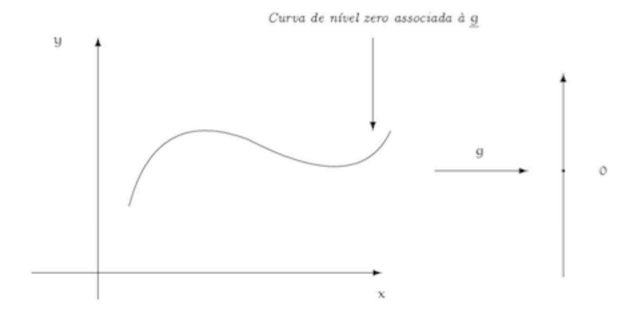
Observação

notemos que o vínculo

$$\{(x\,,y) \in A\,;\; g(x\,,y) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2, \tag{3}$$

representa a curva de nível zero associada à função $\underline{g}$, *que assumiremos satisfazer a condição*

$$\nabla g(x\,,y) \neq \vec{O}\,, \quad \text{para} \quad (x\,,y) \in A\,. \tag{4}$$



Observação

Observemos que, para cada $t \in \mathbb{R}$, o conjunto

$$\{(x\,,y) \in A\;;\; f(x\,,y) = t\} \subseteq \mathbb{R}^2 \tag{5}$$

representa a curva de nível igual a $\underline{t}$ associada à função $\underline{f}$.
Variando $t \in \mathbb{R}$, obteremos uma família de curvas de nível associadas à função $\underline{f}$.
Suponhamos, por exemplo, que a curva de nível $\underline{t_o}$, associada à função $\underline{f}$, intercepta a curva de nível zero associada à função $\underline{g}$:

$$\{(x\,,y) \in A\;;\; g(x\,,y) = 0\} \tag{6}$$

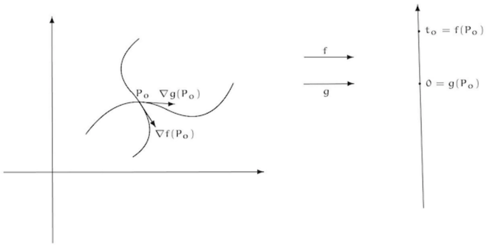
transversalmente, *isto é, de modo que uma curva não seja tangente à outra, ou ainda, os vetores*

$$\nabla f(x_o\,,y_o) \quad e \quad \nabla g(x_o\,,y_o)$$

são linearmente independentes, no correspondente ponto de intersecção, que denotaremos por

$$P_o \doteq (x_o\,,y_o) \in A\,.$$

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



Para valores de $\underline{t}$ próximos do valor $\underline{t_o}$, a curva de nível

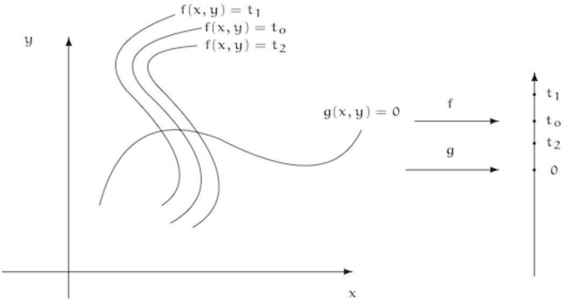
$$\{(x\,,y)\in A\,;\;f(x\,,y)=t\}\,,$$

também irá interceptar a curva de nível zero associada à função $\underline{g}$, isto é, à curva

$$\{(x\,,y)\in A\,;\;g(x\,,y)=0\}\,.$$

Mais do que isso, para valores de $\underline{t}$ próximos do valor $\underline{t_o}$, as curvas de nível $\underline{t}$, associadas à função $\underline{f}$, interceptarão a curva de nível zero, associada à função $\underline{g}$, transversalmente nos pontos da interseção entre ambas.

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



Isto significa que o valor t_o **<u>não</u>** pode ser um valor de mínimo ou de máximo da função <u>f</u> quando restrita ao vínculo

$$\{(x\,,y) \in A\,;\; g(x\,,y) = 0\}\,.$$

De fato, se as curvas de nível $\underline{t}$, associadas à função $\underline{f}$, para valores de $\underline{t}$ próximos do valor $\underline{t_o}$, cruzam transversalmente, a curva de nível zero, associada à função $\underline{g}$ então, para $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno, temos que se

$$t_1 \in (t_o\,, t_o + \varepsilon) \tag{7}$$

a curva de nível $\underline{t_1}$, associada à função $\underline{f}$, cruzará transversalmente, a curva de nível zero, associada à função $\underline{g}$, ou seja, a curva (3). Neste caso teremos que o número real $\underline{t_o}$ **<u>não</u>** poderá ser um valor máximo da função $\underline{f}$, quando restrita ao vínculo (3), pois se

$$P_o = (x_o, y_o) \in \{(x,y) \in A; g(x,y) = 0\} \cap \{(x,y) \in A; f(x,y) = t_o\},$$
$$P_1 \doteq (x_1, y_1) \in \{(x,y) \in A; g(x,y) = 0\} \cap \{(x,y) \in A; f(x,y) = t_1\},$$

então: $\quad f(x_1\,, y_1) = t_1 \overset{(7)}{>} t_o = f(x_o\,, y_o)\,,$

mostrando que o número real $\underline{t_o}$ **<u>não</u>** poderá ser um valor máximo da função $\underline{f}$, quando restrita ao vínculo (3).

Por outro lado, para $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno, teremos que se

$$t_2 \in (t_o - \varepsilon\,,\, t_o), \tag{8}$$

a curva de nível $\underline{t_2}$, associada à função $\underline{f}$, cruzará transversalmente, a curva de nível zero, associada à função $\underline{g}$, isto é, a curva (3).
Logo o valor $\underline{t_o}$ **<u>não</u>** poderá ser um valor de mínimo da função $\underline{f}$, quando restrita ao vínculo (3).
De fato, pois se

$$P_2 \doteq (x_2, y_2) \in \{(x, y) \in A; g(x, y) = 0\} \cap \{(x, y) \in A; f(x, y) = t_2\}\,,$$

então: $\quad f(x_2\,,y_2) = t_2 \overset{(8)}{<} t_o = f(x_o\,,y_o)\,,$

mostrando que o número real $\underline{t_o}$ **<u>não</u>** poderá ser um valor mínimo da função $\underline{f}$, quando restrita ao vínculo (3).

Observação

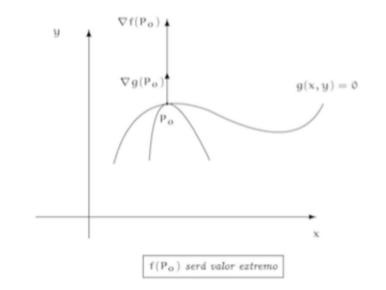
portanto, das análises feitas no item acima, podemos concluir que a função $\underline{f}$ **somente** *poderá atingir um valor extremo (máximo ou mínimo) quando restrita ao vínculo* (3), *em um determinado ponto*

$$P_o = (x_o\,, y_o)\,, \text{ se a curva de nível } f(x\,, y) = f(P_o)$$

for uma curva tangente à curva de nível zero, associada à função $\underline{g}$, *no ponto* $\underline{P_o}$, *ou seja, se os vetores*

$$\nabla f(P_o), \nabla g(P_o) \text{ forem paralelos, ou: } \nabla f(P_o) = \lambda \cdot \nabla g(P_o), \quad (9)$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ *(veja figura abaixo).*



Observação

notemos que as considerações acima podem ser verificadas da seguinte forma: suponhamos que a curva de nível zero associada à função $\underline{g}$, isto é,

$$\{(x\,,y)\in A\,;\; g(x\,,y)=0\}\,,$$

possa ser representada, na forma paramétrica, pela curva parametrizada regular $\gamma : I \doteq (a\,,b) \to \mathbb{R}^2$, *dada por*

$$\gamma(t) \doteq (x(t)\,,y(t))\,, \quad para \quad t \in I\,,$$

$$ou\ seja,\quad \gamma'(t) = (x'(t)\,,y'(t)) \neq 0\,, \quad para \quad t \in I\,.$$

Se a função $\underline{g}$ é contínua, com derivadas parciais de 1.a ordem, contínuas em $\underline{A}$ e se

$$\nabla g(x\,,y) \neq \vec{O}\,, \quad para\ cada \quad (x\,,y) \in A\,,$$

então a situação acima ocorrerá.

Logo, a restrição da função $\underline{f}$, ao vínculo (3), *será a restrição da função $\underline{f}$, à curva parametrizada* $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, *que denotaremos por* $\varphi : I \to \mathbb{R}$, *onde*

$$\varphi(t) \doteq f[\gamma(t) = f[x(t)\,,y(t)]\,, \quad para \quad t \in I\,. \qquad (10)$$

Observação

Deste modo, para analisar os extremos da função $\underline{f}$ restrita ao vínculo (3)*, basta encontrar os extremos da função $\underline{\varphi}$ no intervalo $\underline{I}$, esta função é uma função real, de uma variável real (Cálculo I).*
Observemos que a função $\underline{\varphi}$ é de classe $\underline{C^1}$ no intervalo aberto $\underline{I}$ e assim, se existir um extremo da função $\underline{\varphi}$, ele deverá ocorrer em ponto crítico da função $\underline{\varphi}$, ou seja, em $t_o \in I$, de modo que

$$\varphi'(t_o) = 0\,. \tag{11}$$

Mas, para $t \in I$, da regra da cadeia, temos que:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &\overset{(10)}{=} \frac{\partial f}{\partial x}[x(t)\,,y(t)]\,\overbrace{\frac{dx}{dt}(t)}^{=x'(t)} + \frac{\partial f}{\partial y}[x(t)\,,y(t)]\,\overbrace{\frac{dy}{dt}(t)}^{=y'(t)} \\ &\overset{(10)}{=} \nabla f[x(t),y(t)] \bullet \gamma'(t). \end{aligned} \tag{12}$$

Assim, fazendo

$$t = t_o \quad \text{e tomando-se} \quad P_o = (x(t_o)\,, y(t_o))\,, \quad \text{obteremos:}$$

$$\nabla f(P_o) \bullet \gamma\,'(t_o) \overset{(12)}{=} \varphi\,'(t_o) \overset{(11)}{=} 0\,, \qquad (13)$$

ou seja, o vetor $\gamma\,'(t_o)$ deve ser ortogonal ao vetor $\nabla f(P_o)$.
Lembremos que o vetor $\gamma\,'(t_o)$ é ortogonal ao vetor $\nabla g(P_o)$, pois $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ é uma parametrização da curva de nível zero, associada à função $\underline{g}$.
Como o vetor $\nabla f(P)$ é ortogonal às curvas de nível associadas à função $\underline{f}$, que contém o ponto $\underline{P}$, segue-se que no ponto $\underline{P_o}$, a curva de nível zero, associada à função $\underline{g}$ (isto é, (3)) e a curva de nível $\underline{f(P_o)}$, associada à função $\underline{f}$, isto é,

$$\{(x\,, y) \in A\,;\ f(x\,, y) = f(P_o)\}\,,$$

deverão ser tangentes no ponto $\underline{P_o}$.
Portanto, deveremos ter

$$\nabla f(P_o) = \lambda_o \cdot \nabla g(P_o)$$

para algum $\lambda_o \in \mathbb{R}$, mostrando a validade de (9).

Observação

Observemos que as condição

$$\nabla f(x_o\,,y_o) = \lambda_o \cdot \nabla g(x_o, y_o)\,, \quad \textit{para algum } \lambda_o \in \mathbb{R}$$
$$e \;\; g(x_o\,,y_o) = 0\,,$$

são equivalentes a que o ponto

$$(x_o\,,y_o\,,\lambda_o) \in A \times \mathbb{R}$$

seja um ponto crítico da função de três variáveis $h : A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$h(x\,,y\,,\lambda) \doteq f(x\,,y) - \lambda\, g(x\,,y)\,, \quad \textit{para} \;\; (x\,,y\,,\lambda) \in A \times \mathbb{R}\,. \tag{14}$$

De fato, o ponto

$$(x_o\,,y_o\,,\lambda_o) \in A \times \mathbb{R}$$

será um ponto crítico da função $\underline{h}$, dada por (14), se, e somente se:

$$\nabla h(x_o\,,y_o\,,\lambda_o) = (0\,,0\,,0)\,,$$

ou seja: $$\begin{cases} 0 = \dfrac{\partial h}{\partial x}(x_o, y_o, \lambda_o) \overset{(14)}{=} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o) - \lambda_o\,\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_o, y_o) \\[2ex] 0 = \dfrac{\partial h}{\partial y}(x_o, y_o\,,\lambda_o) \overset{(14)}{=} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) - \lambda_o\,\dfrac{\partial g}{\partial y}(x_o, y_o) \\[2ex] 0 = \dfrac{\partial h}{\partial \lambda}(x_o\,,y_o\,,\lambda_o) \overset{(14)}{=} -g(x_o\,,y_o) \end{cases} ,$$

mas as duas primeiras equações acima são equivalentes a equação

$$\nabla f(x_o\,,y_o) = \lambda_o \cdot \nabla g(x_o\,,y_o)$$

e a terceira a é equivalente a equação

$$g(x_o\,,y_o) = 0\,,$$

como afirmamos acima.

Observação

O raciocínio acima pode ser aproveitado para o caso de $\underline{n}$*-variáveis. Vejamos o caso em que as função* $\underline{f}$ *e* $\underline{g}$ *são funções de três variáveis, a valores reais, satisfazendo as mesmas hipóteses acima, a saber, são funções de classe* $\underline{C^1}$ *no conjunto* $\underline{A}$*, que é um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^3$*, e*

$$\nabla g(P) \neq 0 \quad \textit{para} \quad P \in A\,.$$

Esta última condição garante que a superfície de nível zero associada à função $\underline{g}$*, isto é,*

$$\{(x\,,y\,,z) \in A\,;\; g(x\,,y\,,z) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3\,, \tag{15}$$

venha a definir uma superfície, que indicaremos por $\underline{S}$*, que é uma superfície parametrizada regular perto de cada ponto* $P_o \in A$*.*

continuando..

Observação

Em particular, para cada ponto $P_o \in S$, existem duas curvas

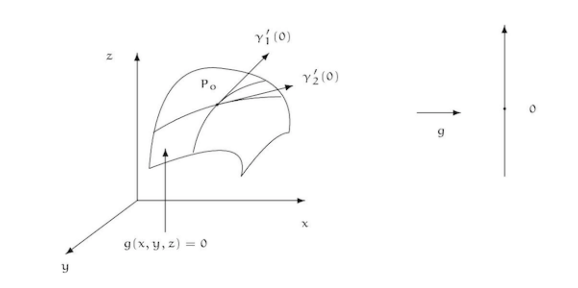
$$\gamma_j : (-\varepsilon\,,\varepsilon) \to S\,, \quad para \quad j \in \{1\,,2\}\,,$$

$$satisfazendo \quad \gamma_1(0) = \gamma_2(0) = P_o$$

$$e\ os\ vetores \quad {\gamma_1}'(0) \quad e \quad {\gamma_2}'(0)$$

são linearmente independentes..

As curvas parametrizadas acima são as, assim denominadas, linhas coordenadas associada à parametrização da superfície $\underline{S}$ *(figura abaixo).*



continuando..

Observação

Se $P_o = (x_o\,, y_o\,, z_o)$ é um ponto de extremo da função $\underline{f}$, restrita ao vínculo (15), então as funções $\varphi_1\,, \varphi_2 : I \to \mathbb{R}$, dadas por

$$\varphi_1(t) \doteq f[\gamma_1(t)] \quad e \quad \varphi_2(t) \doteq f[\gamma_2(t)]\,, \quad para \quad t \in I\,, \tag{16}$$

também terão extremo (máximo ou mínimo) em $t = 0$, que corresponde ao ponto

$$P_o = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)\,.$$

Como as funções $\underline{\varphi_1}$, $\underline{\varphi_2}$ são de classe $\underline{C^1}$ no intervalo aberto $\underline{I}$ segue que, onde elas tiverem um extremo, este deverá ser ponto crítico das mesmas, em particular

$$t = 0\,,$$

deverá ser um ponto crítico das funções $\underline{\varphi_1}$, $\underline{\varphi_2}$ (Cálculo I), ou seja, deveremos ter

$$\varphi_1{}'(0) = \varphi_2{}'(0) = 0\,. \tag{17}$$

continuando..

Observação

Derivando em as relações (17) *acima, em relação a* $\underline{t}$, *e utilizando a regra da cadeia, obtemos as relações (semelhante ao caso anterior):*

$$\begin{aligned} \varphi_1{}'(t) &= \nabla f[\gamma_1(t)] \bullet \gamma_1{}'(t)\,, \\ \varphi_2{}'(t) &= \nabla f[\gamma(t)] \bullet \gamma_2{}'(t)\,. \end{aligned} \tag{18}$$

Em particular, fazendo $t = 0$ *em* (18), *obteremos:*

$$0 \overset{(17)}{=} \varphi_1{}'(0) \overset{(18)}{=} \nabla f[\gamma_1(0)] \bullet \gamma_1{}'(0) \tag{19}$$

$$0 \overset{(17)}{=} \varphi_2{}'(0) \overset{(18)}{=} \nabla f[\gamma(0)] \bullet \gamma_2{}'(0)\,,$$

ou seja, $$\nabla f(P_o) \bullet \gamma_1{}'(0) = 0 \quad e \quad \nabla f(P_o) \bullet \gamma_2{}'(0) = 0\,. \tag{20}$$

continuando..

Observação

Como os vetores

$$\gamma_1'(0) \quad e \quad \gamma_2'(0)$$

são linearmente independentes em $\mathbb{R}^3$, *deveremos ter o vetor* $\underline{\nabla f(P_o)}$ *ortogonal ao plano gerado por estes dois vetores, isto é, pelos vetores*

$$\gamma_1'(0) \quad e \quad \gamma_2'(0)\,,$$

que contém o ponto $\underline{P_o}$, *que nada mais é que o plano tangente à superfície de nível zero, associada à função* $\underline{g}$ *(ou seja,* (15)*) no ponto* $\underline{P_o}$*).*

$$\text{Como} \quad \nabla g(P_o) \neq \vec{O}$$

é um vetor ortogonal ao plano acima, segue-se os vetores

$$\nabla g(P_o) \quad e \quad \nabla f(P_o)$$

deverão ser paralelos, isto é,

$$\nabla f(P_o) = \lambda_o \cdot \nabla g(P_o)\,, \quad \text{para algum } \lambda_o \in \mathbb{R},$$

como o que ocorreu no caso $n = 2$.

A situação acima se estende para $\underline{n}$-variáveis e deste modo temos:

Teorema

(**do multiplicador de Lagrange, para um vínculo**) *Sejam $f\,,g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções de classe $\underline{C^1}$, definidas em um subconjunto aberto $\underline{A}$ de $\mathbb{R}^n$. Suponhamos que*

$$\nabla g(P) \neq 0\,, \ \textit{para cada} \ \ P \in A\,. \tag{21}$$

Se no ponto $P_o \in A$, a função $\underline{f}$ possui um ponto extremo (máximo ou mínimo) quando restrita ao vínculo

$$\{p \in A\,;\ g(P) = 0\}, \tag{22}$$

$$\textit{então deverá existir} \ \ \lambda_o \in \mathbb{R}\,,$$

$$\textit{tal que} \ \ \nabla f(P_o) = \lambda_o \cdot \nabla g(P_o) \ \ e \ \ g(P_o) = 0\,, \tag{23}$$

$$\textit{ou, de outro modo, o ponto} \ \ (P_o\,,\lambda_o) \in A \times \mathbb{R}$$

deverá ser um ponto crítico da função $h : A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$h(P\,,\lambda) \doteq f(P) - \lambda \cdot g(P)\,, \ \ \textit{para} \ \ (P\,,\lambda) \in A \times \mathbb{R}\,. \tag{24}$$

Observação

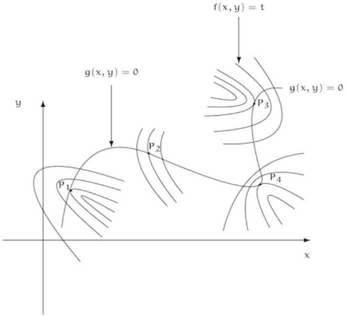
Se $n = 2$, e tivermos em mãos a representação geométrica dos gráficos das curvas de nível da função $\underline{f}$ e da curva de nível zero, associada à função g (isto é, do vínculo), então podemos, visualmente, saber onde a função $\underline{f}$ poderá ter seus extremos (máximo ou mínimo), quando restrita ao restrito ao vínculo

$$\{(x\,,y) \in A\,;\; g(x\,,y) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2\,.$$

Vale observar que poderemos ter, eventualmente, vários pontos onde vale (23), ou seja, o Teorema nos fornece condições necessárias para que uma função tenha um extremo quando restrita a um vínculo.

Em algumas situações teremos que fazer uma estudo à parte para encontrarmos, de fato, os extremos procurados, como mostra a situação da figura abaixo.

A figura abaixo nos fornece, um exemplo, de representação geométrica das curvas de nível, associada à função $\underline{f}$, e da curva de nível zero, associada à função g.



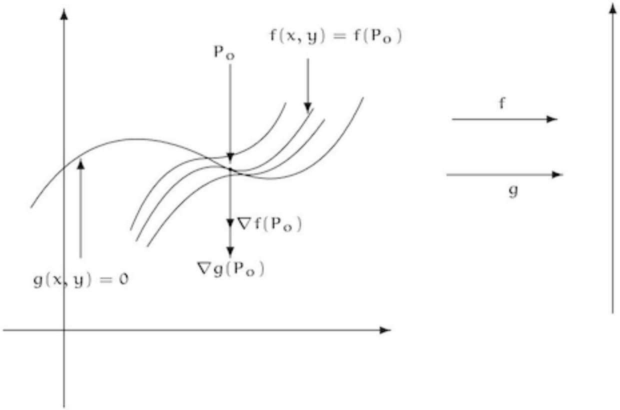
Vemos que os pontos extremos (máximo ou mínimo) da função $\underline{f}$, restrita ao vínculo $\{(x\,,y) \in A\,;\; g(x\,,y) = 0\}$, se existirem, deverão ocorrer nos pontos: P_1 ,, P_3 ou P_4, pois nestes pontos as curvas de nível, associadas à função $\underline{f}$, e de nível zero, associada à função $\underline{g}$, serão tangentes, isto é,

$$\nabla f(P_i) = \lambda_i \cdot \nabla g(P_i)$$

Observação

- *A figura acima ilustra o fato que as condições do Teorema do multiplicador de Lagrange são* **necessárias**, *mas podem* **não ser suficiente** *para encontrarmos os* **extremos** *de uma função restrita a um vínculo.*
  Neste caso (figura acima), devemos encontrar entre os pontos encontrados no Teorema do multiplicador de Lagrange, quais deles têm as propriedades que queremos, ou seja, qual deles é **máximo ou mínimo global** *da função restrita ao vínculo.*
- *Uma situação mais crítica seria o caso de encontrarmos vários pontos que satisfazem o Teorema do multiplicador de Lagrange e entre eles termos pontos onde a função* **não** *tem nem mesmo um extremo local, quando restrita ao vínculo.*
  A figura abaixo, temos que o ponto $\underline{P_o}$ *é um ponto onde vale o Teorema do multiplicador de Lagrange (pois vale a condição* (9)*), mas a função* $\underline{f}$ **não** *tem um extremo no ponto* $\underline{P_o}$*, quando restrita ao vínculo* $\{(x\,,y) \in A\;;\; g(x\,,y) = 0\}$.

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



A seguir aplicaremos o Teorema do multiplicador de Lagrange a alguns casos...

Exemplo

Encontre, se existir, o ponto $P_o \doteq (x_o\,,y_o)$, *sobre o ramo da hipérbole*

$$x\,y = 1\,, \quad \textit{para} \quad (x\,,y) \in A \doteq (0\,,\infty) \times \mathbb{R} \tag{25}$$

que está mais próximo à origem $(0\,,0)$.

Resolução: observemos que a função a ser minimizada é função distância de um ponto $P = (x\,,y)$ à origem $P_o = (0\,,0)$, isto é, a função $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$d(x\,,y) \doteq d(P\,,P_o) \overset{\text{Geometria Analítica}}{=} \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2}\,, \quad \text{para} \quad P \doteq (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,, \tag{26}$$

sujeita ao vínculo

$$\{(x\,,y) \in A\,;\; g(x\,,y) = 0\}, \tag{27}$$

onde a função $g : A \doteq (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por

$$g(x\,,y) \doteq x\,y - 1\,, \quad \text{para cada} \quad (x\,,y) \in A\,. \tag{28}$$

Um fato simples a ser notado é que se o ponto $P = (x\,,y) \in A$ é um ponto que satisfaz o vínculo (27) e minimiza a função $\underline{d}$, então este mesmo ponto minimizará a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x\,,y) \doteq d^2(x\,,y) \overset{(26)}{=} x^2 + y^2\,, \quad \text{para} \quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad (29)$$

restrita ao mesmo vínculo (27) e reciprocamente.
Logo basta encontrarmos o(s) ponto(s) de mínimo da função $\underline{f}$, sujeita ao vínculo (27).
Esta observação facilitará os cálculos das derivadas parciais, pois a função $\underline{f}$ não envolve radicais.
Logo, nosso problema, resume-se a encontrar o mínimo global da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x\,,y) \doteq x^2 + y^2\,, \quad \text{para} \quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,, \qquad (30)$$

sujeita à ao vínculo

$$g(x\,,y) \doteq x\,y - 1 = 0\,, \quad \text{para} \quad (x\,,y) \in A\,. \qquad (31)$$

Observemos que as funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$ são de classe $\underline{C^\infty}$ em $\mathbb{R}^2$ nos conjuntos $\mathbb{R}^2$ e $\underline{A}$, respectivamente (pois são funções polinomiais). Notemos também que, para cada $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, teremos:

$$\nabla f(x\,,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\,,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y)\right) \overset{(30)}{=} (2\,x\,,2\,y) \tag{32}$$

e

$$\nabla g(x\,,y) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x\,,y)\,,\ \frac{\partial g}{\partial y}(x\,,y)\right) \overset{(31)}{=} (y\,,x) \neq (0\,,0)\,, \tag{33}$$

para cada $(x\,,y) \in A \overset{(25)}{=} (0\,,\infty) \times \mathbb{R}$.

Logo, pelo Teorema do multiplicador de Lagrange (isto é, o Teorema 0.1), temos que um ponto $P_o = (x_o\,, y_o)$ que satisfaz a condição de minimizar a função $\underline{f}$, restrita ao vínculo (31), deverá satisfazer, para algum $\lambda_o \in \mathbb{R}$, as equações

$$\begin{cases} \nabla f(x_o, y_o) = \lambda_o \cdot \nabla g(x_o, y_o) \\ g(x_o, y_o) = 0 \end{cases} \overset{(32),(33)}{\Longrightarrow} \begin{cases} (2x_o, 2\,y_o) = \lambda_o (y_o, x_o) \\ x_o y_o - 1 = 0 \end{cases},$$

ou seja, $$\begin{cases} 2\,x_o = \lambda_o\,y_o \\ 2\,y_o = \lambda_o\,x_o \\ x_o\,y_o = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\,x_o = \lambda_o\,y_o \\ y_o = \dfrac{\lambda\,x}{2} \\ x_o\,y_o = 1 \end{cases},$$

ou ainda, $$\begin{cases} 2\,x_o = {\lambda_o}^2 \dfrac{x_o}{2} \\ 2\,y_o = \lambda_o\,x_o \\ x_o\,y_o = 1 \end{cases} \overset{x_o \in (0\,,\infty)}{\Longrightarrow} \begin{cases} \lambda_o = -2 \quad \text{ou} \quad \lambda_o = 2 \\ 2\,y_o = \lambda_o\,x_o \\ x_o\,y_o = 1 \end{cases},$$

assim $$\begin{cases} \lambda_o = 2 \\ x_o = y_o \\ x_o\,y_o = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \lambda_o = -2 \\ x_o = -y_o \\ x_o\,y_o = 1 \end{cases}. \qquad (34)$$

Notemos que o sistema (34) à direita, **não** possui solução pois, das duas últimas equações, deveríamos ter

$$-{x_o}^2 = 1\,,$$

que **não** tem solução real, assim, a única solução corresponderá ao sistema (34) à esquerda, cuja mesma será:

$$\lambda_o = 2 \quad \text{e} \quad (x_o\,,y_o) = (1\,,1)\,. \tag{35}$$

De fato pois, neste caso, das últimas duas equações, deveremos ter

$${x_o}^2 = 1, \text{e como } x_o \in (0\,,\infty)\,, \text{segue que } x_o = 1\,,$$
$$\text{e assim, a 2.a equação de (34) à esquerda, segue: } y_o = 1\,,$$

mostrando (35).
Afirmamos que no ponto

$$P_o \doteq (1\,,1)\,,$$

a função $\underline{f}$ tem um de mínimo, quando restrita ao vínculo (27).

De fato,

como $x\,y = 1$, para $x \in (0\,,\infty)$,

teremos: $f(x\,,y) - f(1\,,1) \overset{(30)}{=} x^2 + y^2 - 2$

$$\overset{(31)\text{ implica que } y=\frac{1}{x}}{=} \overbrace{x^2 + \frac{1}{x^2} - 2}^{\frac{x^4+1-2x^2}{x^2}} = \frac{x^4 - 2\,x^2 + 1}{x^2} = \frac{\left(x^2-1\right)^2}{x^2} \geq 0\,,$$

isto é, $f(x\,,y) \geq f(1\,,1) \overset{(30)}{=} 2$,

para todo ponto $(x\,,y)$ sobre o ramo de hipérbole $x\,y = 1$,

para $x \in (0\,,\infty)$, como afirmamos acima.

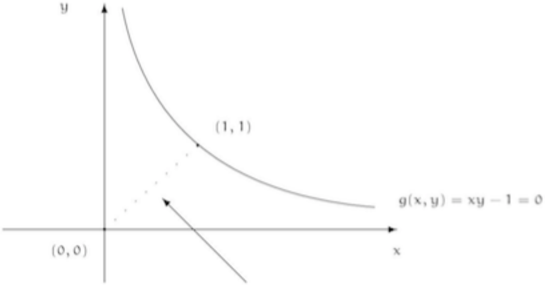
Notemos, porém, que a distância mínima será $\underline{\sqrt{2}}$, ou seja:

$$d(1\,,1) \overset{(29)}{=} \sqrt{f(1\,,1)}\,,$$

pois minimizamos a função $\underline{d^2}$, completando a resolução.

$\square$

A representação geométrica da situação acima descrita na figura abaixo.



$\sqrt{2}$ é a distância mínima do ramo da hipérbole àl origem

Exemplo

Determine (se existir) o ponto $P_o \doteq (x_o\,, y_o)$ *sobre a reta*

$$x + 2\,y = 1 \tag{36}$$

cujo o produto de suas coordenadas seja o maior possível.

Resolução: a função a ser maximizada é a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x\,, y) \doteq x\,y\,, \quad \text{para} \quad (x\,, y) \in \mathbb{R}^2 \tag{37}$$

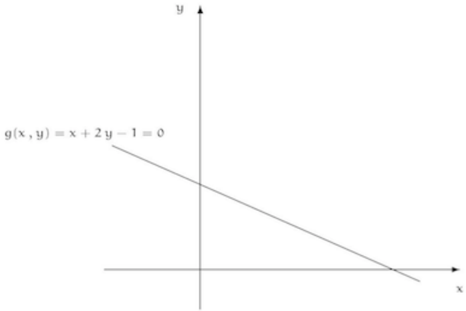
quando sujeita ao vínculo

$$\left\{(x\,, y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ g(x\,, y) = 0\right\}, \tag{38}$$

onde a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é dada por

$$g(x\,, y) \doteq x + 2\,y - 1\,, \quad \text{para} \quad (x\,, y) \in \mathbb{R}^2\,. \tag{39}$$

Resolução: a figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



Observemos que as funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$ são de classe $\underline{C^\infty}$ em $\mathbb{R}^2$ (pois são funções polinomiais) e para cada $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, teremos:

$$\nabla f(x\,,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\,,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y)\right) \overset{(37)}{=} (y\,,x)\,, \tag{40}$$

$$\text{e}\quad \nabla g(x\,,y) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x\,,y)\,,\ \frac{\partial g}{\partial y}(x\,,y)\right) \overset{(39)}{=} (1\,,2) \neq (0\,,0)\,. \tag{41}$$

Logo, pelo Teorema do multiplicador de Lagrange (isto é, Teorema 0.1), um ponto $P_o \doteq (x_o\,,y_o)$ que satisfaz a condição de maximizar a função $\underline{f}$, restrita ao vínculo (38), deverá satisfazer, para algum $\lambda_o \in \mathbb{R}$, as equações:

$$\begin{cases} \nabla f(x_o\,,y_o) = \lambda_o \cdot \nabla g(x_o\,,y_o) \\ g(x_o\,,y_o) = 0 \end{cases} \overset{(40)e(41)}{\Longrightarrow} \begin{cases} (y_o\,,x_o) = \lambda_o\,(1\,,2) \\ x_o + 2\,y_o = 1 = 0 \end{cases},$$

ou seja, $\begin{cases} y_o = \lambda \\ x_o = 2\,\lambda_o \\ x_o + 2\,y_o = 1 \end{cases}$,

ou ainda, $\begin{cases} y_o = \lambda_o \\ \lambda_o = \dfrac{x_o}{2} \\ x_o + 2\,y = 1 \end{cases}$ isto é, $\begin{cases} y_o = \dfrac{x_o}{2} \\ \lambda_o = \dfrac{x_o}{2} \\ 4\,\lambda_o = 1 \end{cases}$, logo $\begin{cases} \lambda_o = \dfrac{1}{4} \\ x_o = \dfrac{1}{2} \\ y_o = \dfrac{1}{4} \end{cases}$.

Logo, o candidato ao ponto procurado é o ponto $P_o \doteq \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.
Afirmamos que o ponto $P_o = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ é realmente um ponto de máximo global da função $\underline{f}$, quando restrita ao vínculo (38).
De fato, como

$x + 2y = 1\,,$ para $(x\,, y) \in \mathbb{R}^2$, segue que

$$f(x\,, y) - f\overbrace{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)}^{=P_o} \overset{(37)}{=} x\,y - \frac{1}{8} \overset{(39)\text{ implicará } x=1-2\,y}{=} (1 - 2\,y)\,y - \frac{1}{8}$$

$$= -2\,y^2 + y - \frac{1}{8} = -2\left(y - \frac{1}{4}\right)^2 \leq 0\,,$$

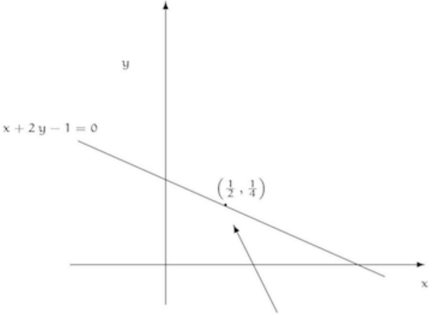
isto é, $f(x\,, y) \leq f\overbrace{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)}^{=P_o} \overset{(37)}{=} \frac{1}{8}\,,$

para todo ponto $P = (x\,, y) \in \mathbb{R}^2$ que pertença à reta

$$x + 2y = 1\,,$$

completando a resolução.

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



$\frac{1}{8}$ é o maior valor do produto das coordenadas dos pontos sobre a reta $x + 2y = 1$

Um problema envolvendo funções a valores reais, com três variáveis reais, é dado pelo:

Exemplo

Suponhamos que $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ *e* $d \in \mathbb{R}$ *estão fixados.*

$$\begin{aligned} &\textit{Encontre o ponto } P \doteq (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3 \\ &\textit{pertencente ao plano } a\,x + b\,y + c\,z + d = 0 \\ &\textit{mais próximo ao ponto } P_o \doteq (x_o\,,y_o\,,z_o)\,,\ \textit{fixado} \end{aligned} \tag{42}$$

Encontre também o valor da correspondente distância mínima.

Resolução: precisamos minimizar a função distância de um ponto $\underline{P}$ ao ponto $\underline{P_o}$, isto é, minimizar a função $d : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por

$$d(x,y,z) \doteq d(P,P_o) \overset{\text{GA}}{=} \sqrt{(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 + (z-z_o)^2},$$

para $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, restrita ao vínculo: $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; g(x,y,z) = 0\}$,

onde a função $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é dada por

$$g(x,y,z) \doteq a\,x + b\,y + c\,z + d\,, \quad \text{para} \quad (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,. \tag{43}$$

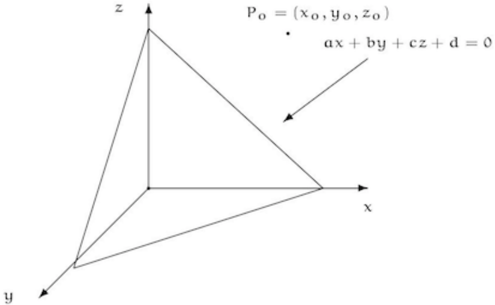
Iremos minimizarmos a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x,y,z) \doteq d^2(x,y,z) = (x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 + (z-z_o)^2 \quad (44)$$

$(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3$, sujeita ao vínculo

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; g(x,y,z) = 0\}. \quad (45)$$

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



Observemos que as funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$ são de classe $\underline{C^\infty}$ em $\mathbb{R}^3$ (pois são funções polinomiais).

Notemos também que, para $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, teremos:

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y z)\right)$$
$$\overset{(44)}{=} (2(x - x_o), 2(y - y_o), 2(z - z_o)), \qquad (46)$$
$$\text{e } \nabla g(x, y, z) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z)\right)$$
$$\overset{(44)}{=} (a, b, c) \overset{a^2+b^2+c^2 \neq 0}{\neq} (0, 0, 0). \qquad (47)$$

Logo podemos aplicar o Teorema do multiplicador de Lagrange (isto é, Teorema 0.1).

Neste caso, um ponto $P_1 \doteq (x_1\,, y_1\,, z_1)$ que satisfaz a condição de maximizar a função $\underline{f}$, restrita ao vínculo (45), deverá satisfazer, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, as equações:

$$\begin{cases} \nabla f(x_1, y_1, z_1) = \lambda_1 \cdot \nabla g(x_1, y_1, z_1) \\ g(x_1, y_1\,, z_1) = 0 \end{cases}$$

$$\overset{(46),(47)}{\Longrightarrow} \begin{cases} (2(x_1 - x_o), 2\,(y_1 - y_o), 2(z_1 - z_o)) = \lambda_1(a, b, c) \\ a\,x_1 + b\,y_1 + c\,z_1 + d = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\,(x_1 - x_o) = \lambda_1\,a \\ 2\,(y_1 - y_o) = \lambda_1\,b \\ 2\,(z_1 - z_o) = \lambda_1\,c \\ a\,x_1 + b\,y_1 + c\,z_1 + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{\lambda_1\,a}{2} + x_o \\ y_1 = \dfrac{\lambda_1\,b}{2} + y_o \\ z_1 = \dfrac{\lambda_1\,c}{2} + z_o \\ a\,x_1 + b\,y_1 + c\,z_1 + d = 0 \end{cases},$$

e resolvendo o sistema linear...

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b\,(b\,x_o - a\,y_o) + c\,(c\,x_o - a\,z_o) - a\,d}{a^2 + b^2 + c^2} \\[2ex] y_1 = \dfrac{a\,(a\,y_o - b\,x_o) + c\,(c\,y_o - b\,z_o) - b\,d}{a^2 + b^2 + c^2} \\[2ex] z_1 = \dfrac{a\,(a\,z_o - c\,x_o) + b\,(b\,z_o - c\,y_o) - c\,d}{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases} .$$

Mostremos que, no ponto $P_1 = (x_1\,,y_1\,,z_1)$, a função $\underline{f}$ tem um mínimo global, quando restrita ao vínculo (45).
De fato, pois a função não possui máximo, quando restrita ao vínculo (45) e temos

$$f(x\,,y\,,z) \overset{(44)}{=} x^2 + y^2 + z^2 \geq 0\,, \quad \text{para} \quad (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,.$$

Além disso, a distância do ponto $P_o = (x_o\,, y_o\,, z_o)$ ao plano

$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0\,,$$

será dada por:

$$\sqrt{f(x_1\,, y_1\,, z_1)} \overset{(44)}{=} \sqrt{(\underbrace{x_1 - x_o}_{=\frac{\lambda_1\,a}{2}})^2 + (\underbrace{y_1 - y_o}_{=\frac{\lambda_1\,b}{2}})^2 + (\underbrace{z_1 - z_o}_{=\frac{\lambda_1\,c}{2}})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{{\lambda_1}^2}{4} a^2 + \frac{{\lambda_1}^2}{4}\, b^2 + \frac{{\lambda_1}^2}{4}\, c^2} = \underbrace{\sqrt{\frac{{\lambda_1}^2}{4}\, \left(a^2 + b^2 + c^2\right)}}_{=\sqrt{\frac{{\lambda_1}^2}{4}}\,\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}$$

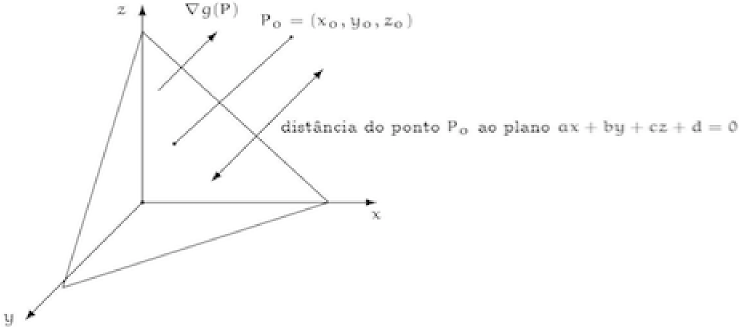
$$= \frac{|\lambda_1|}{2}\,\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{|a\,x_o + b\,y_o + c\,z_o + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\,,$$

que é a fórmula conhecida da distância de um ponto $P_o = (x_o, y_o, z_o)$ a um plano que possui equação geral dada por

$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0,$$

visto na disciplina de Geometria Analítica. $\square$

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



Exemplo

Determine, se existir, as dimensões de um paralelepípedo reto de volume máximo, cujas arestas são paralelas aos eixos coordenados, que esteja inscrito no elipsóide

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1 \,. \tag{48}$$

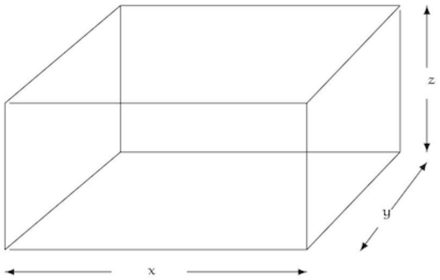
Resolução: representando por $P \doteq (x\,,y\,,z)$ os comprimentos das arestas do paralelepípedo, com $(x\,,y\,,z)$ no primeiro octante, isto é,

$$x\,,y\,,z > 0\,,$$

vemos que o seu volume é expresso pela função $V : (0\,,\infty)^3 \to \mathbb{R}$, dada por

$$V(x\,,y\,,z) \doteq 8\,x\,y\,z\,, \quad \text{para} \quad (x\,,y\,,z) \in (0\,,\infty)^3 \,. \tag{49}$$

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



Assim, devemos encontrar o máximo da função $\underline{V}$, quando restrita ao vínculo

$$\{(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ g(x\,,y\,,z) = 0\}\ , \tag{50}$$

onde a função $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é dada por

$$g(x\,,y\,,z) \doteq \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} - 1\,, \quad \text{para} \quad (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,, \tag{51}$$

isto é, quando o ponto $P = (x\,,y\,,z)$ pertence ao elipsoide de equação (48).

Lembremos que o elipsoide é um conjunto fechado e limitado em $\mathbb{R}^3$ e a função $\underline{V}$, dada por (49), é de classe C^∞ em $\mathbb{R}^3$, em particular, é uma função contínua em $\mathbb{R}^3$.
Logo, de um resultado anterior, segue que esta possuirá valores de máximo e mínimo globais sobre o elipsoide.
Observemos que a função $\underline{g}$ também é de classe $\underline{C^\infty}$ em $\mathbb{R}^3$ (pois é uma função polinomial).
Além disso, para $(x\,,y\,,z) \in (0\,,\infty)^3$, teremos:

$$\begin{aligned}
\nabla V(x\,,y\,,z) &= \left(\frac{\partial V}{\partial x}(x\,,y\,,z)\,,\ \frac{\partial V}{\partial y}(x\,,y\,,z)\,,\ \frac{\partial V}{\partial z}(x\,,y\,,z)\right) \\
&\overset{(49)}{=} (8\,y\,z\,,8\,x\,z\,,8\,x\,y)\,, \qquad (52) \\
\nabla g(x\,,y\,,z) &\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x\,,y\,,z)\,,\ \frac{\partial g}{\partial y}(x\,,y\,,z)\,,\ \frac{\partial g}{\partial z}(x\,,y\,,z)\right) \\
&\overset{(51)}{=} \left(\frac{x}{2}\,,\frac{2\,y}{9}\,,\frac{z}{8}\right) \neq (0\,,0\,,0)\,. \qquad (53)
\end{aligned}$$

Logo, podemos utilizar o Teorema do multiplicador de Lagrange (ou seja, o Teorema 0.1)) para encontrarmos o possível ponto

$$P_o = (x_o\,, y_o\,, z_o) \in (0\,, \infty)^3\,,$$

que minimizará a função $\underline{V}$, dada por (49), sobre o vínculo (50). Aplicando tal resultado, deverá existir $\lambda_o \in \mathbb{R}$, de modo que:

$$\begin{cases} \nabla V(x_o\,, y_o\,, z_o) = \lambda_o \cdot \nabla g(x_o\,, y_o\,, z_o) \\ g(x_o\,, y_o\,, z_o) = 0 \end{cases},$$

$$\stackrel{(52),(53)}{\Longrightarrow} \begin{cases} (8\,y_o\,z_o\,, 8\,x_o\,z_o\,, 8\,x_o\,y_o) = \lambda_o \left(\dfrac{x_o}{2}\,, \dfrac{2\,y_o}{9}\,, \dfrac{z_o}{8}\right) \\ \dfrac{{x_o}^2}{4} + \dfrac{{y_o}^2}{9} + \dfrac{{z_o}^2}{16} - 1 = 0 \end{cases},$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8\, y_o\, z_o = \dfrac{\lambda_o\, x_o}{2} \\ 8\, x_o\, z_o = \dfrac{2\,\lambda_o\, y_o}{9} \\ 8\, x_o\, y_o = \dfrac{\lambda_o\, z_o}{8} \\ \dfrac{x_o^2}{4} + \dfrac{y_o^2}{9} + \dfrac{z_o^2}{16} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2\, y_o}{x_o} = \dfrac{9\, x_o}{2\, y_o} \\ \dfrac{z_o}{x_o} = \dfrac{4\, x_o}{z_o} \\ \dfrac{z_o}{2\, y_o} = \dfrac{8\, y_o}{9\, z_o} \\ \dfrac{x_o^2}{4} + \dfrac{y_o^2}{9} + \dfrac{z_o^2}{16} = 1 \end{cases} ,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y_o^2}{9} = \dfrac{x_o^2}{4} \\ z_o^2 = 4\, x_o^2 \\ \dfrac{z_o^2}{16} = \dfrac{y_o^2}{9} \\ \dfrac{x_o^2}{4} + \dfrac{x_o^2}{4} + \dfrac{x_o^2}{4} = 1 \end{cases} \overset{x>0}{\Rightarrow} \begin{cases} \dfrac{y_o^2}{9} = \dfrac{x_o^2}{4} \\ x_o = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{z_o^2}{16} = \dfrac{y_o^2}{9} \\ \dfrac{x_o^2}{4} + \dfrac{x_o^2}{4} + \dfrac{x_o^2}{4} = 1 \end{cases}$$

$$\overset{y,z>0}{\Rightarrow} \begin{cases} x_o = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ y_o = \sqrt{3} \\ z_o = \dfrac{4\sqrt{3}}{3} , \end{cases} , \text{ logo } \; P_o \doteq \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3} \right) , \qquad (54)$$

é o ponto que satisfaz as condições do Teorema do multiplicador de Lagrange.

Logo o ponto acima é o único satisfazendo o Teorema do multiplicador de Lagrange e assim nos fornecerá o ponto de máximo global da função $\underline{V}$, restrita ao vínculo (50), já que o volume mínimo será zero, que corresponderia ao volume de um retângulo inscrito no elipsoide. Os vértices do mesmo serão:

$$P_1 \doteq \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right), \quad P_2 \doteq \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right),$$

$$P_3 \doteq \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right), \quad P_4 \doteq \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right),$$

$$P_5 \doteq \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}, -\frac{4\sqrt{3}}{3}\right), \quad P_6 \doteq \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}, -\frac{4\sqrt{3}}{3}\right),$$

$$P_7 \doteq \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{3}, -\frac{4\sqrt{3}}{3}\right), \quad P_8 \doteq \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{3}, -\frac{4\sqrt{3}}{3}\right),$$

e seu volume será: $V(P_o) \overset{\text{exercício}}{=} \dfrac{64\sqrt{3}}{3}$ unidades de volume.

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.