Multiplicadores de Lagrange para dois vínculos

Nos slides anteriores tratamos do problema de encontrar os extremos de uma função de várias variáveis reais, a valores reais, quando está está restrita a **um** vínculo.
Nestes tratamos do problema de encontrar os extremos de uma função de várias variáveis reais, a valores reais, quando restrita a **dois** vínculos.
O problema será achar os extremos (máximo ou mínimo) de uma função de três variáveis, $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sujeita às condições, denominados de vínculos,

$$\{(x, y, z) \in A; g(x, y\, z) = 0\}, \{(x, y, z) \in A; h(x, y, z) = 0\}, \quad (1)$$

onde $g\,, h : A \to \mathbb{R}$ são duas funções dadas.

Começaremos estabelecendo o resultado principal, cuja demonstração pode ser encontrada nas notas de aula:

Teorema

(**dos multiplicadores de Lagrange, para dois vínculos**)
Consideremos $\underline{A}$ um subconjunto aberto em $\mathbb{R}^3$ e as funções $f\,,g\,,h : A \to \mathbb{R}$ de classe $\underline{C^1}$ no conjunto $\underline{A}$. Consideremos os conjuntos

$$B \doteq \{(x\,,y\,,z) \in A\,;\; g(x\,,y\,,z) = h(x\,,y\,,z) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3 \qquad (2)$$

e suponhamos que os vetores

$$\nabla g(x\,,y\,,z) \quad e \quad \nabla h(x\,,y\,,z)$$

sejam linearmente independentes, para cada $(x\,,y\,,z) \in B$, ou seja, não são paralelos, em cada ponto do conjunto $\underline{B}$.
Se o ponto $P_o \doteq (x_o\,,y_o\,,z_o) \in B$ é um extremo (máximo ou mínimo) da função $\underline{f}$, restrita ao conjunto $\underline{B}$, então deverão existir constantes $\lambda_o\,,\mu_o \in \mathbb{R}$, tais que

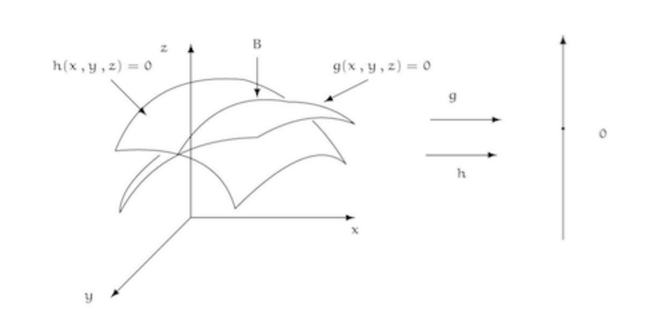
$$\nabla f(x_o\,,y_o\,,z_o) = \lambda_o \cdot \nabla g(x_o\,,y_o\,,z_o) + \mu_o \cdot \nabla h(x_o\,,y_o\,,z_o)\,. \qquad (3)$$

Observação

Observemos que as restrições

$$\{(x\,,y\,,z) \in A;\, g(x\,,y\,,z) = 0 = h(x\,,y\,,z)\}$$

nos fornecem uma curva obtida da intersecção das superfícies de nível zero das funções g e da função h.
A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



Observação

Observemos que, no Teorema 0.1, *a condição* (3) *é uma condição* **necessária** *para que a função* $\underline{f}$ *tenha um extremo global no ponto* $\underline{P_o}$, *quando restrita aos vínculos* (2), *mas pode* **não** *ser uma condição* **suficiente**, *ou seja, podemos obter vários pontos que satisfazem a condição* (3) *e assim precisaremos descobrir entre eles qual deles é que resolve o problema em questão, a saber, qual dará origem ao máximo e qual dará origem ao mínimo da função quando restrita aos vínculos.*

Exemplo

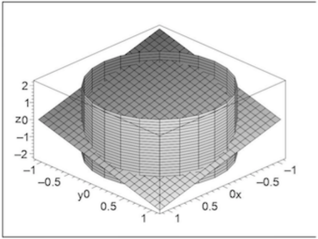
Determine os semi-eixos maior e menor, da elipse dada pela interseção do cilindro de revolução

$$\left\{(x\,,y\,,z)\in\mathbb{R}^3\;;\;x^2+y^2=1\right\} \tag{4}$$

com o plano

$$\left\{(x\,,y\,,z)\in\mathbb{R}^3\;;\;x+y+z=0\right\}. \tag{5}$$

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.

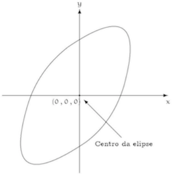


<ins>**Resolução:**</ins> notemos que o plano (5) contém a origem
$O \doteq (0\,,0\,,0)$.
Além disso, o eixo de rotação do cilindro (4) é o eixo <ins>Oz</ins>, isto é, é dado pela interseção dos planos

$$x = y = 0\,,$$

temos que o centro da elipse deverá ser a origem $O = (0\,,0\,,0)$.
Assim, precisamos encontrar os pontos sobre a elipse que estão mais próximos e mais afastados da origem (que é o centro da elipse), estes pontos serão os extremos dos eixos menor e maior da elipse, respectivamente.

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



Logo precisaremos minimizar e maximizar a função distância à origem, que indicaremos por $d : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por

$$d(x, y, z) \doteq d(P, P_o) \overset{GA}{=} \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \text{para} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \tag{6}$$

restrita aos vínculos

$$B \doteq \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ;\, g(x, y, z) = 0 \;\text{ e }\; h(x, y, z) = 0\right\}, \tag{7}$$

onde as funções $g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, são dadas por

$$g(x, y, z) \doteq x^2 + y^2 - 1 \tag{8}$$

$$\text{e} \qquad h(x, y, z) \doteq x + y + z, \quad \text{para} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \tag{9}$$

Logo, basta encontrarmos os extremos (máximo e mínimo) globais da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x, y, z) \doteq d^2(x, y, z) \overset{(6)}{=} x^2 + y^2 + z^2 \,, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \qquad (10)$$

(isto é, o quadrado da distância à origem) sujeita aos vínculos (7).
Notemos que a função $\underline{f}$ é de classe $\underline{C^\infty}$ em $\mathbb{R}^3$ (pois é uma função polinomial) e, além disso, para cada $(x\,, y\,, z) \in \mathbb{R}^3$, teremos

$$\nabla f(x, y, z) \overset{(10)}{=} (2\,x\,,\, 2\,y\,,\, 2\,z)\,. \qquad (11)$$

Observemos também que as funções $\underline{g}$ e $\underline{h}$, dadas por (8) e (9), respectivamente, são de classe $\underline{C^\infty}$ em $\mathbb{R}^3$ (pois são funções polinomiais).
Além disso, como o conjunto $\underline{B}$, dado por (7), é um subconjunto limitado e fechado de $\mathbb{R}^3$.
Logo, de um resultado anterior, segue que a função $\underline{f}$, quando restrita ao conjunto $\underline{B}$, terá máximo e mínimo globais, que estarão entre os pontos encontrados pelo Teorema dos multiplicadores de Lagrange (ou seja, o Teorema 0.1).

Notemos que, para cada $(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3$, teremos:

$$\nabla g(x\,,y\,,z) \stackrel{(8)}{=} (2\,x\,,2\,y\,,0) \tag{12}$$

$$\text{e} \qquad \nabla h(x\,,y\,,z) \stackrel{(9)}{=} (1\,,1\,,1)\,. \tag{13}$$

Logo estes vetores são linearmente independentes, para cada $(x\,,y\,,z) \in B$, isto é, na intersecção das superfícies de nível zero, associadas as funções $\underline{g}$ e $\underline{h}$.

Para mostrarmos isto, notemos que se $(x\,,y\,,z) \in B$,

então deveremos ter $x^2 + y^2 = 1\,,$

o que implicará em $x \neq 0$ ou $y \neq 0\,,$

mostrando que $\nabla g(x\,,y\,,z) = (2\,x\,,2\,y\,,0) \neq (0\,,0\,,0)$

e assim os vetores $\nabla g(x\,,y\,,z)$ e $\nabla f(x\,,y\,,z)$

serão linearmente independentes em cada ponto do conjunto $\underline{B}$.

Logo, pelo Teorema dos multiplicadores de Lagrange (isto é, o Teorema 0.1, segue se o ponto $P_o \doteq (x_o\,, y_o\,, z_o) \in B$, for um ponto extremo (máximo e mínimo) da função $\underline{f}$, sujeita aos vínculos $\underline{B}$, deverão existir $\lambda_o\,, \mu_o \in \mathbb{R}$,tais que (utilizaremos (4), (5), (11) e (13)):

$$\begin{cases} \nabla f(x_o\,, y_o\,, z_o) = \lambda_o \cdot \nabla g(x_o\,, y_o\,, z_o) + \mu_o \cdot \nabla h(x_o\,, y_o\,, z_o) \\ g(x_o\,, y_o\,, z_o) = 0 \\ h(x_o\,, y_o\,, z_o) = 0 \end{cases},$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2\,x_o\,, 2\,y_o\,, 2\,z_o) = \lambda_o\,(2\,x_o\,, 2\,y_o\,, 0) + \mu_o\,(1\,, 1\,, 1) \\ {x_o}^2 + {y_o}^2 = 0 \\ x_o + y_o + z_o = 0 \end{cases},$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2\lambda_o x + \mu_o \\ 2y = 2\lambda_o y + \mu_o \\ 2z = \mu_o \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\,(1 - \lambda_o)\,x_o = \mu_o \\ 2\,(1 - \lambda_o)\,y_o = \mu_o \\ 2\,z_o = \mu_o \\ {x_o}^2 + {y_o}^2 = 1 \\ x_o + y_o + z_o = 0 \end{cases}. \tag{14}$$

Assim, das duas primeiras equações em (14), obteremos

$$(1-\lambda_o)\,x_o = (1-\lambda_o)\,y_o\,. \tag{15}$$

Notemos que:

- $$\text{se} \quad \lambda_o \neq 1\,, \text{ deveremos ter } x_o = y_o\,. \tag{16}$$

  Com isto, das duas últimas equações do sistema (14), obteremos:

  $$z_o = -2\,x_o \text{ e } 2\,x_o{}^2 = 1\,,$$
  $$\text{isto é,} \quad x_o = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\,, \tag{17}$$

  que resultarão nos pontos

  $$P_1 \doteq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right) \text{ e } P_2 \doteq \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right) \tag{18}$$

- por outro lado,

se $\lambda_o = 1$, (19)

da 1.a equação do sistema (14), segue que $\mu_o = 0$

e, da 3.a equação do sistema (14), teremos $z_o = 0$. (20)

Desta forma, as duas últimas equações do sistema (14) tornar-se-ão:

$$\begin{cases} {x_o}^2 + {y_o}^2 = 1 \\ x_o + y_o = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\,{x_o}^2 = 1 \\ y_o = -x_o \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_o = \frac{\sqrt{2}}{2}\,, \\ y_o = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_o = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,, \\ y_o = \frac{\sqrt{2}}{2}\,, \end{cases}$$

dando origem aos seguintes pontos

$$P_3 \doteq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,, -\frac{\sqrt{2}}{2}\,, 0\right) \text{ e } P_4 \doteq \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,, \frac{\sqrt{2}}{2}\,, 0\right). \tag{21}$$

$$\text{Notemos que} \quad f(P_1) = f(P_2) \overset{\text{exercício}}{=} 3$$

$$\text{e} \qquad f(P_3) = f(P_4) \overset{\text{exercício}}{=} 1\,.$$

Assim, o semi-eixo maior da elipse obtida da interseção do cilindro (4) com o plano (5) será dado pelo segmento

$$\overline{OP_1} \quad \text{ou o segmento} \quad \overline{OP_2}$$

e terá comprimento igual a $\underline{\sqrt{3}}$ e o semi-eixo menor será dado pelo segmento

$$\overline{OP_3} \quad \text{ou o segmento} \quad \overline{OP_4}$$

e este terá comprimento igual a $\underline{1}$.
Em particular, o eixo maior da elipse obtida da interseção do cilindro (4) com o plano (5) é dado pelo segmento $\overline{P_1P_2}$ e o eixo menor será dado pelo segmento $\overline{P_3P_4}$.
Em particular, os vértices da elipse ocorrerão nos pontos P_1, P_2, P_3, P_4, dados por (18) e (21), completando a resolução.

Exercício

Consideremos dois planos concorrentes dados pelas equações gerais

$$\pi_1 \,:\, a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + d_1 = 0$$
$$e\ \pi_2 \,:\, a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z + d_2 = 0\,.$$

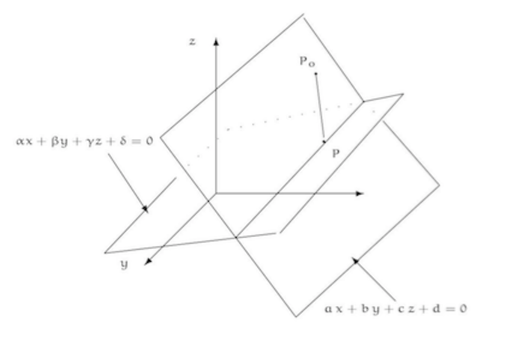
Notemos que a condição de serem concorrentes se traduz em termos dos vetores normais aos planos, isto é, os vetores

$$\vec{n}_1 \doteq (a_1\,, b_1\,, c_1) \quad e \quad \vec{n}_2 \doteq (a_2\,, b_2\,, c_2),$$

serem linearmente independentes em $\mathbb{R}^3$*.*
Fixado um ponto $P_o \doteq (x_o\,, y_o\,, z_o) \in \mathbb{R}^3$*, utilize o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange para dois vínculos (isto é, o Teorema* 0.1*), para encontrar o ponto* $P_1 \doteq (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ *pertencente a intersecção dos planos dados (que será uma reta), que está mais próximo do ponto* $\underline{P_o}$
Encontre também o valor da distância mínima.

Observação

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



F I M