O teorema fundamental do Cálculo

Teorema

Seja $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $[a\,,b]$. *Consideremos a função* $F : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ *dada por:*

$$F(x) \doteq \int_a^x f(t)\,dt\,, \quad \textit{para} \quad x \in [a\,,b]\,. \tag{1}$$

Então a função $\underline{F}$ *será diferenciável em* $[a\,,b]$ *e, além disso, teremos*

$$F'(x) = f(x)\,, \quad \textit{para} \quad x \in [a\,,b]\,, \tag{2}$$

ou seja,

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = f(x)\,, \quad \textit{para} \quad x \in [a\,,b]\,. \tag{3}$$

Demonstração: como, a função $\underline{f}$ é contínua em $[a\,,b]$, para cada $x \in [a\,,b]$, ela também será contínua em $[a\,,x]$.
Assim, de um Teorema anterior, a função $\underline{f}$ será integrável em $[a\,,x]$, logo a função $\underline{F}$, dada por (1), está bem definida em $[a\,,b]$.
Mostraremos que a função $\underline{F}$ é diferenciável em $x_o \in (a\,,b)$ e que

$$F'(x_o) = f(x_o)\,.$$

Os casos em que $x_o = a$ ou $x_o = b$, são análogos e serão deixados como exercício para o leitor.
Mostraremos que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(x_o + h) - F(x_o)}{h}$$

existe e é igual a $f(x_o)$.

Utilizando as propriedades de integral definida, vistas anteriormente, teremos:

$$F(x_o+h)-F(x_o) \overset{(1)}{=} \int_a^{x_o+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_o} f(t)\,dt$$
$$= \int_a^{x_o+h} f(t)\,dt + \int_{x_o}^{a} f(t)\,dt = \int_{x_o}^{x_o+h} f(t)\,dt\,. \qquad (4)$$

Logo, pelo Teorema do valor médio para integral definida (Teorema **??**), visto anteriormente, aplicado à função $\underline{f}$, no intervalo $[x_o\,, x_o+h]$, segue que podemos encontrar $\bar{x} \in [x_o\,, x_o+h]$, de modo que

$$F(x_o+h)-F(x_o) \overset{(4)}{=} \int_{x_o}^{x_o+h} f(t)\,dt$$
$$= f\,(\bar{x})\,[(x_o+h)-x_o] = f\,(\bar{x})\ h\,,$$

ou seja, $$\frac{F(x_o+h)-F(x_o)}{h} = f\,(\bar{x})\,. \qquad (5)$$

Notemos que, se $h \to 0$, como $\bar{x} \in [x_o\,, x_o + h]$, teremos $\bar{x} \to x_o$, da continuidade da função $\underline{f}$, segue $\lim\limits_{h \to 0^+} f\,(\bar{x}) = f(x_o)$. (6)

$$\text{Logo} \quad \lim_{h \to 0^+} \frac{F(x_o + h) - F(x_o)}{h} \stackrel{(5)}{=} \lim_{h \to 0^+} f\,(\bar{x}) \stackrel{(6)}{=} f(x_o)\,, \tag{7}$$

mostrando que a função $\underline{F}$ é diferenciável à direita em $x_o \in (a\,, b)$ e, além disso,

$$F'_+(x_o) = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(x_o + h) - F(x_o)}{h} \stackrel{(6)}{=} f(x_o)\,.$$

De modo semelhante mostra-se que

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{F(x_o + h) - F(x_o)}{h} = f(x_o)\,,$$

ou seja, a função $\underline{F}$ é diferenciável à esquerda do ponto $x_o \in (a\,, b)$, e do Cálculo 1, segue que a função $\underline{F}$ é diferenciável em $x_o \in (a, b)$ e, além disso, vale (2).

Observação

A função $F : [a\,,b] \to \mathbb{R}$*, dada por* (1)*, será dita primitiva da função contínua* $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$*.*

Como conseqüência do Teorema 0.1 acima, temos o:

Teorema

Sejam $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $[a\,,b]$ *e* $G : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ *uma função continuamente diferenciável em* $[a\,,b]$*, tal que*

$$G'(x) = f(x)\,, \quad para \quad x \in [a\,,b]\,, \tag{8}$$

ou seja, uma primitiva da função f *em* $[a\,,b]$*. Então teremos*

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a)\,. \tag{9}$$

Demonstração:

Consideremos a função $F : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ dada por:

$$F(x) \doteq \int_a^x f(t)\,dt\,, \text{ para } x \in [a\,,b]\,. \qquad (10)$$

Do Teorema 0.1, segue que a função F é diferenciável em $[a\,,b]$ e, além disso, para $x \in [a\,,b]$, temos:

$$F'(x) \overset{(4)}{=} f(x)\,,$$

e, de (8),segue que $G'(x) = f(x)\,,$

ou seja, $G'(x) = F'(x)\,.$

Do Cálculo 1, podemos encontrar $C \in \mathbb{R}$, tal que, para $x \in [a\,,b]$, teremos:

$$G(x) = F(x) + C \overset{(10)}{=} \int_a^x f(t)\,dt + C\,, \qquad (11)$$

Logo

$$G(b) - G(a) \stackrel{(11)}{=} \left[\int_a^b f(t)\,dt + C\right] - \left[\underbrace{\int_a^a f(t)\,dt}_{=0} + C\right]$$

$$= \int_a^b f(t)\,dt\,,$$

mostrando (9), como queríamos demonstrar.

$\square$

Observação

1. *Utilizaremos as seguintes notações :*

$$G(x)\Big|_{x=a}^{x=b} \doteq G(b) - G(a)\,,$$

$$\text{ou ainda,} \qquad G(x)\Big|_{a}^{b}\,. \tag{12}$$

2. *O Teorema 0.2, também é conhecido como Teorema Fundamental do Cálculo.*
   Ele coloca o problema de calcular uma integral definida de uma função contínua em intervalo $[a\,,b]$, em termos de encontrar uma primitiva, da função definida pelo integrando da integral definida no intervalo $[a\,,b]$.

Para ilustrar temos :

Exemplo

Calcular a integral definida (caso exista)

$$\int_1^3 x^2\, dx\,. \tag{13}$$

Resolução:

Seja $f : [1\,,3] \to \mathbb{R}$, a função dada por

$$f(x) \doteq x^2\,,\ \text{para } x \in [1\,,3]\,. \tag{14}$$

Temos que a função $\underline{f}$ acima é contínua em $[1\,,3]$, logo, por Teorema visto anteriormente, a função $\underline{f}$ será integrável em $[1\,,3]$. Uma primitiva da função $\underline{f}$ em $[1\,,3]$, pode ser a função $G : [1\,,3] \to \mathbb{R}$ dada por:

$$G(x) = \frac{x^3}{3}\,,\ \text{para } x \in [1\,,3]\,. \tag{15}$$

Logo, do Teorema fundamental do Cálculo, isto é, o Teorema 0.2, teremos:

$$\int_1^3 x^2\,dx \overset{(14)}{=} \int_1^3 f(x)\,dx \overset{(9)}{=} G(3) - G(1)$$

$$\overset{(15)}{=} \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{26}{3},$$

$$\text{ou seja,} \quad \int_1^3 x^2\,dx = \frac{26}{3}. \tag{16}$$

completando a resolução.

□

Observação

Como a função $\underline{f}$, do Exemplo 0.1 acima, é não negativa em $[1\,,3]$, *ou seja,*

$$f(x) \overset{(14)}{\geq} 0\,, \quad para \quad x \in [1\,,3]$$

e integrável em $[1\,,3]$, *de uma Observação anterior, segue que o valor da área, que denotaremos por $\underline{\mathcal{A}}$, da região limitada, que chamaremos de $\underline{R}$, contida no plano xOy, delimitada pelas representações geométricas gráficos da função $\underline{f}$, das retas $x = 1$, $x = 3$ e do eixo Ox será dada por*

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,dx \overset{(14)}{=} \int_1^3 x^2\,dx \overset{(16)}{=} \frac{26}{3}\ u.a..$$

Exemplo

Mostre que a função $f : [-4\,,3] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq |x+2|\,, \;\; para\; x \in [-4\,,3]\,, \tag{17}$$

é integrável em $[-4\,,3]$ *e encontre* $\displaystyle\int_{-4}^{3} |x+2|\, dx\,.$

Resolução:

Do Cálculo 1, segue que a função $\underline{f}$ é contínua em $[-4\,,3]$, logo, de um Teorema visto, segue que a função $\underline{f}$, dada por (17), será integrável em $[-4\,,3]$.

Notemos que

$$|x+2| = x+2\,, \;\; \text{para } x \in [-2\,,3]\,, \tag{18}$$

$$|x+2| = -(x+2)\,, \;\; \text{para } x \in [-4\,,-2]\,, \tag{19}$$

$$\text{pois } |a| = \begin{cases} a\,, & \text{se } a \geq 0 \\ -a\,, & \text{se } a < 0 \end{cases}\,. \tag{20}$$

Lodo das propriedades de integral definida, temos:

$$\int_{-4}^{3} |x+2|\, dx = \int_{-4}^{-2} \underbrace{|x+2|}_{\overset{(19)}{=}-(x+2)}\, dx + \int_{-2}^{3} \underbrace{|x+2|}_{\overset{(18)}{=}x+2}\, dx$$

$$= \int_{-4}^{-2} -(x+2)\, dx + \int_{-2}^{3} (x+2)\, dx$$

$$= -\left[\int_{-4}^{-2} x\, dx + 2\int_{-4}^{-2} 1\, dx\right] + \int_{-2}^{3} x\, dx + 2\int_{-2}^{-3} 1\, dx \qquad (21)$$

Notemos seF_1 , $F_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dadas por

$$F_1(x) \doteq \frac{x^2}{2}, \qquad (22)$$

$$F_2(x) \doteq x, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}, \qquad (23)$$

são primitivas em $\mathbb{R}$, das funções f_1 , $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dadas por

$$f_1(x) \doteq x \quad \text{e} \quad f_2(x) \doteq 1, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Do Teorema 0.2, aplicado cada parcela de (21), teremos:

$$\int_{-4}^{-2} x\,dx \overset{(9)}{=} \left[F_1(x) \Big|_{x=-4}^{x=-2} \right] \overset{(22)}{=} \left[\frac{x^2}{2} \Big|_{x=-4}^{x=-2} \right] \overset{\text{exercício}}{=} -6\,, \tag{24}$$

$$\int_{-4}^{-2} 1\,dx \overset{(9)}{=} \left[F_2(x) \Big|_{x=-4}^{x=-2} \right] \overset{(23)}{=} \left[x \Big|_{x=-4}^{x=-2} \right] \overset{\text{exercício}}{=} 2\,, \tag{25}$$

$$\int_{-2}^{3} x\,dx \overset{(9)}{=} F_1(x) \Big|_{x=-2}^{x=3} \overset{(22)}{=} \left[\frac{x^2}{2} \Big|_{x=-2}^{x=3} \right] \overset{\text{exercício}}{=} -\frac{5}{2}\,, \tag{26}$$

$$\int_{-2}^{-3} 1\,dx \overset{(9)}{=} \left[F_2(x) \Big|_{x=-2}^{x=3} \right] \overset{(23)}{=} \left[x \Big|_{x=-2}^{x=3} \right] \overset{\text{exercício}}{=} -5\,. \tag{27}$$

Substituindo-se (24), (25), (26) e (27) em (21), obteremos:

$$\int_{-4}^{3} |x+2|\,dx = -[-6+2\cdot 2] + \frac{5}{2} + 2\cdot 5 = \frac{29}{2}\,, \tag{28}$$

completando a resolução.

Observação

A função $\underline{f}$, dada por (17), do Exemplo acima, é não negativa em $[-4\,,3]$ e integrável em $[-4\,,3]$.
Logo o valor da área, que denotaremos por $\underline{\mathcal{A}}$, da região limitada, que chamaremos de $\underline{R}$, contida no plano xOy, delimitada pelas representações geométricas dos gráficos da função $\underline{f}$, das retas $x=-4$, $x=3$ e do eixo Ox será de

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,dx \overset{(17)}{=} \int_{-4}^{2} |x+2|\,,dx \overset{(28)}{=} \frac{29}{2}\ u.a..$$

Exemplo

Mostre que a função $F:[0\,,\infty)\to\mathbb{R}$, dada por

$$F(x) \doteq \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt\,, \quad para \quad x\in[0\,,\infty)\,. \tag{29}$$

é diferenciável em $[0\,,\infty)$ e calcule $F'(x)$, para $x\in[0\,,\infty)$.

Resolução: A função $f : [0\,,\infty) \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(t) \doteq \frac{1}{1+t^2}\,, \quad \text{para } t \in [0\,,\infty)\,, \qquad (30)$$

é contínua em $[0\,,\infty)$
Logo, do Teorema 0.1, segue que a função $\underline{F}$, dada por (29), é diferenciável em $[0\,,x]$, para cada $x \in [0\,,\infty)$ e

$$F'(x) \overset{(29)}{=} \frac{d}{dx}\left[\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt\right] \overset{(30)}{=} \frac{d}{dx}\left[\int_0^x f(t)\,dt\right]$$
$$\overset{(3)\,,\ \text{com } a \doteq 0}{=} f(x) \overset{(30)}{=} \frac{1}{1+x^2}\,,$$

completando a resolução.

$\square$

Exemplo

Mostre que a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, função dada por*

$$F(x) \doteq \int_{x}^{x^3} \operatorname{sen}\left(t^2\right)\, dt\,, \quad \textit{para} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{31}$$

é diferenciável em $\mathbb{R}$ *e calcule* $F'(x)$*, para cada* $x \in \mathbb{R}$*.*

Resolução: A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) \doteq \operatorname{sen}\left(t^2\right)\,, \quad \text{para} \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{32}$$

é contínua em $\mathbb{R}$ e, de Teorema visto anteriormente, segue que a função $\underline{f}$ é integrável em qualquer intervalo fechado e limitado contido em $\mathbb{R}$, em particular,

$$\text{em} \quad \left[x\,, x^3\right]\,, \quad \text{se } x \geq 0\,,$$
$$\text{ou em} \quad \left[x^3\,, x\right]\,, \quad \text{se } x < 0\,,$$

Logo a função $\underline{F}$, dada por (31) está bem definida.

Para cada $x \in \mathbb{R}$, das propriedades da integral definida, temos que:

$$F(x) \overset{(31)}{=} \int_x^{x^3} \operatorname{sen}\left(t^2\right)\, dt = \int_x^0 \operatorname{sen}\left(t^2\right)\, dt + \int_0^{x^3} \operatorname{sen}\left(t^2\right)\, dt$$

$$= -\int_0^x \operatorname{sen}\left(t^2\right)\, dt + \int_0^{x^3} \operatorname{sen}\left(t^2\right)\, dt\,. \tag{33}$$

Observemos que, do Teorema 0.1, segue que

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^x \operatorname{sen}\left(t^2\right)\, dt\right] \overset{(32)}{=} \frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\, dt \overset{(9)}{=} f(x)$$

$$\overset{(32)}{=} \operatorname{sen}\left(x^2\right)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{34}$$

Notemos agora que a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) \doteq x^3\,, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{35}$$

$$\text{é diferenciável em } \mathbb{R} \text{ e } \; g'(x) = 3\,x^2\,, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{36}$$

Notemos também que a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$h(y) \doteq \int_0^y \operatorname{sen}\left(t^2\right)\,dt\,, \text{para} y \in \mathbb{R} \text{é diferenciável em } \mathbb{R} \text{ e} \tag{37}$$

$$h'(y) \overset{(37)}{=} \frac{d}{dy}\left[\int_0^y \operatorname{sen}\left(t^2\right)\,dt\right] \overset{(9)}{=} \operatorname{sen}\left(y^2\right)\,, \quad \text{para } y \in \mathbb{R}\,. \tag{38}$$

Logo, da regra da cadeia (do Cálculo 1), segue que a função $F_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F_1(x) \doteq h[g(x)] \overset{(35) \text{ e } (37)}{=} \int_0^{x^3} \operatorname{sen}\left(t^2\right)\,dt\,, \quad \text{para } x \in \mathbb{R} \tag{39}$$

também será diferenciável em $\mathbb{R}$.

Ainda da regra da cadeia, para $x \in \mathbb{R}$, teremos:

$$F_1'(x) \overset{(39)}{=} \frac{d}{dx}\{h[g(x)]\} \overset{\text{regra da cadeia}}{=} h'[g(x)]\, g'(x)$$
$$\overset{(38) \text{ e } (36)}{=} \operatorname{sen}\left\{[g(x)]^2\right\} 3\,x^2 \overset{(35)}{=} \operatorname{sen}\left(x^6\right) 3\,x^2 . \qquad (40)$$

Logo, de (34) e (40), segue que a função $\underline{F}$ será diferenciável em $\mathbb{R}$ e, para $x \in \mathbb{R}$, segue

$$F'(x) \overset{(33)}{=} \frac{d}{dx}\left[-\int_0^x \operatorname{sen}\left(t^2\right)\, dt\right] + \frac{d}{dx}\left[\int_0^{x^3} \operatorname{sen}\left(t^2\right)\, dt\right]$$
$$\overset{(34) \text{ e } (40)}{=} -\operatorname{sen}\left(x^2\right) + 3\,x^2 \operatorname{sen}\left(x^6\right) , \qquad (41)$$

completando a resolução.

$\square$