Integração por partes para integral definida

Teorema

Suponhamos que $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são continuamente diferenciáveis em $[a, b]$, então teremos:

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = [f(x)\, g(x)] \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b g(x)\, f'(x)\, dx\,. \tag{1}$$

Demonstração: Como as funções f e g são são continuamente diferenciáveis em $[a, b]$, temos que as funções

$$f\,g\,, \quad f\,g' \quad \text{e} \quad g\,f' \quad \text{são contínuas em } [a, b],$$

assim, de um resultado visto, segue que as funções acima são integráveis em $[a, b]$, ou seja, existem as integrais definidas

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx\,, \quad \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx \text{ e } \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx\,.$$

Notemos que

$$f(x)\, g'(x)\, dx = [f\, g]'(x) - g(x)\, f'(x)\,, \quad \text{para} \quad x \in [a\,, b]\,. \qquad (2)$$

Logo, do Teorema fundamental do Cálculo, segue que

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx \overset{(2)}{=} \int_a^b \left\{[f\, g]'(x) - g(x)\, f'(x)\right\}\, dx$$

$$= \underbrace{\int_a^b [f\, g]'(x)\, dx}_{\overset{\text{Teor.Fund. Cálculo}}{=} [f(x)\, g(x)]\Big|_{x=a}^{x=b}} - \int_a^b g(x)\, f'(x)\, dx$$

$$= [f(x)\, g(x)]\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b g(x)\, f'(x)\, dx\,,$$

mostrando a validade de (1) e completando a demonstração.

$\square$

Observação

Na situação do Teorema acima,

$$\textit{se } u \doteq f(x) \textit{ e } v \doteq g(x)\,,\ \textit{para } x \in [a\,,b]\,,$$

$$\textit{teremos: } du = f'(x)\,dx \textit{ e } dv = g'(x)\,dx$$

(1) *acima, poderá ser escrita, abreviadamente, como:*

$$\int_a^b u\,dv = u\,v\,\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b v\,du\,. \tag{3}$$

Podemos aplicar o Teorema acima ao:

Exemplo

Mostre que a função $f : [0\,,\pi] \to \mathbb{R}$*, dada por*

$$f(x) \doteq x\,\mathrm{sen}(x)\,,\ \textit{para } x \in [0\,,\pi]\,, \tag{4}$$

é integrável em $[0\,,\pi]$ *e encontre o valor de* $\displaystyle\int_0^\pi x\,\mathrm{sen}(x)\,dx\,.$

Resolução: a função f é contínua em $[0\,,\pi]$ logo, de um resultado visto, segue que a função f é integrável em $[0\,,\pi]$.
Notemos que

$$\int_0^\pi x\,\mathrm{sen}(x)\,dx \underset{=}{\left\{\begin{array}{l} \text{se } u \doteq x\,, \text{ então } du = dx \\ \text{se } dv \doteq \mathrm{sen}(x)\,dx\,, \text{ então: } v = -\cos(x) \end{array}\right\}}$$

$$= \int_0^\pi u\,dv \overset{(3)}{=} u\,v\,\Big|_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi v\,du$$

$$= \{x\,[-\cos(x)]\}\,\Big|_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi [-\cos(x)]\,dx$$

$$= \Big[-\pi\,\underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + 0\,\underbrace{\cos(0)}_{=0}\Big] - \int_0^\pi [-\cos(x)]\,dx$$

$$= \pi + \int_0^\pi \cos(x)\,dx\,. \tag{5}$$

Mas,

$$\int_0^{\pi} \cos(x)\,dx \overset{[\operatorname{sen}(x)]' = \cos(x),\ x \in [0\,,\pi]}{=} \left[\operatorname{sen}(x) \Big|_{x=0}^{x=\pi} \right]$$
$$= \underbrace{\operatorname{sen}(\pi)}_{=0} - \underbrace{\operatorname{sen}(0)}_{=0} = 0\,. \tag{6}$$

Logo, substituindo (6) em (5), obteremos

$$\int_0^{\pi} x\,\operatorname{sen}(x)\,dx = \pi\,, \tag{7}$$

completando a resolução.

$\square$

Observação

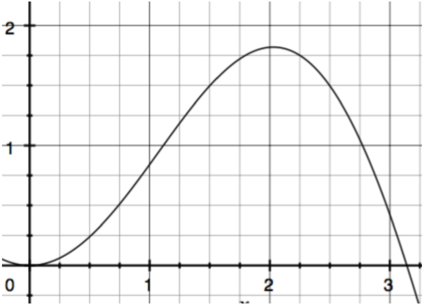
A função $\underline{f}$ do Exemplo acima, dada por (4), *é não negativa em* $[0\,,\pi]$, *ou seja,*

$$f(x) \overset{(4)}{=} x\,\mathrm{sen}(x) \geq 0\,, \quad para \quad x \in [0\,,\pi]$$

e é integrável em $[0\,,\pi]$ *(pois é contínua em* $[0\,,\pi]$*), segue que o valor da integral definida* (6) *será igual ao valor da área, que indicaremos por* $\underline{\mathcal{A}}$, *da região limitada, contida no plano* xOy, *delimitada pelas representações geométricas dos gráficos da função* $\underline{f}$, *das retas* $x = 0$, $x = \pi$ *e do eixo* Ox, *ou ainda,*

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,dx \overset{(4)}{=} \int_0^{\pi} x\,\mathrm{sen}(x)\,dx \overset{(7)}{=} \pi\,u.a.\,.$$

A figura abaixo nos fornece uma representação geométrica para o gráfico da região limitada descrita acima.



Integração por substituição para integrais definidas

Teorema

Sejam $g : [a\,, b] \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável em* $[a\,, b]$ *e* $f : g([a\,, b]) \to \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $g([a\,, b])$ *e tal que a função* $F : g([a\,, b]) \to \mathbb{R}$ *é uma primitiva de* $\underline{f}$ *em* $g([a\,, b])$*, isto é,*

$$F'(y) = f(y)\,, \quad \textit{para} \quad y \in g([a\,, b])\,. \tag{8}$$

$$\textit{Então} \quad \int_a^b f\,[g(x)]\,g'(x)\,dx = F\,[g(b)] - F\,[g(a)]$$

$$= F[g(x)]\,\Big|_{x=a}^{x=b}\,. \tag{9}$$

Demonstração: da regra da cadeia, segue que

$$[F \circ g]'(x) = F'(x)\, g'(x)$$
$$\overset{(8)}{=} f(x)\, g'(x)\,, \quad \text{para} \quad x \in [a\,, b]\,,$$

ou seja, a função $F \circ g$ é uma primitiva da função $f\, g'$ em $[a\,, b]$. Logo, do Teorema fundamental do Cálculo, segue que

$$\int_a^b f[g(x)]\, g'(x)\, dx = F[g(b)] - F[g(a)]\,,$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Observação

De um Teorema visto, temos que função $G : g([a\,,b]) \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$G(x) \doteq \int_{g(a)}^{x} f(t)\,dt\,,\ \ para\ cada\ x \in g([a\,,b])\,, \qquad (10)$$

é uma primitiva da função $\underline{f}$ *em* $g([a\,,b])$.

Logo, do Teor. fund. do Cálculo, temos que (9) *é equivalente à*

$$\int_{a}^{b} f[g(x)]\,g'(x)\,dx = G[g(b)] - \underbrace{G[g(a)]}_{\overset{(10)}{=}0} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy\,, \quad (11)$$

ou seja, o Teorema da substituição para a integral definida (ou seja, o Teorema 0.2, em um certo sentido, nos diz como **<u>mudar de variáveis</u>** *em uma integral definida.*

Observação

Mais precisamente, se

$$g : [a\,,b] \to g([a\,,b])$$

é uma função bijetora e continuamente diferenciável em $[a\,,b]$,

$$\textit{considerando-se:}\quad y \doteq g(x)\,,\quad \textit{para}\quad x \in [a\,,b]\,, \tag{12}$$

$$\textit{segue que:}\quad dy = g'(x)\,dx\,. \tag{13}$$

$$\textit{Logo, em (12), se}\quad x = a\,,\ \textit{definindo-se:}\quad y_a = g(a)$$

$$\textit{e, em (12), se}\quad x = b\,,\ \textit{definido-se:}\quad y_b = g(b)\,,$$

$$\textit{e, de (11), teremos:}\quad \int_a^b f[\underbrace{g(x)}_{\overset{(12)}{=}y}]\,\underbrace{g'(x)\,dx}_{\overset{(13)}{=}dy} = \int_{y_a}^{y_b} f(y)\,dy\,. \tag{14}$$

Exemplo

Mostre que a função $h : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$h(x) \doteq \operatorname{sen}(x)\cos(x)\,, \quad para \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\,, \tag{15}$$

é integrável em $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *e encontre* $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x)\cos(x)\,dx\,.$

Resolução: a função h, dada por (15), é contínua em $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ logo, de um Teorema visto, a função h será integrável em $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
Consideremos as funções

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{e} \quad g : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$

dadas por: $f(y) \doteq y\,, \quad \text{para} \quad y \in \mathbb{R}$ (16)

$$\text{e } y = g(x) \doteq \operatorname{sen}(x)\,, \quad \text{para} \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\,, \tag{17}$$

$$\text{teremos:} \quad g'(x) = \cos(x)\,, \quad \text{para} \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\,. \tag{18}$$

A função g é bijetora e continuamente diferenciável em $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (verifique!).

$$\text{Assim}: \quad dy = g'(x)\,dx \overset{(17)}{=} \cos(x)\,dx\,. \tag{19}$$

$$\text{Logo, em (17), se} \quad x = a \doteq -\frac{\pi}{2}\,,$$

$$\text{teremos:} \quad y_a = g(a) \overset{(17)}{=} \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1\,. \tag{20}$$

$$\text{E, em (17), se} \quad x = b \doteq \frac{\pi}{2}\,,$$

$$\text{teremos:} \quad y_b = g(b)\,, \overset{(17)}{=} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\,. \tag{21}$$

Logo das considerações acima e o Teorema do Teorema 0.2 , segue que:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x)\, \cos(x)\, dx \overset{(16),(17),(18)}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\,[\underbrace{g(x)}_{\overset{(17)}{=}y}]\, \underbrace{g\,'(x)\, dx}_{\overset{(19)}{=}dy}$$

$$\overset{(11)}{=} \int_{g\left(-\frac{\pi}{2}\right)}^{g\left(\frac{\pi}{2}\right)} f\,(y)\, dy \overset{(16),(17)}{=} \int_{\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)}^{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)} y\, dy$$

$$\overset{(20),(21)}{=} \int_{-1}^{1} y\, dy \overset{\text{Teor. fund. do Cálculo}}{=} \frac{y^2}{2}\Big|_{y=-1}^{y=1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0\,,$$

completando a resolução.

$\square$

Proposição

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uma função* $2\,L-$*periódica, ou seja*

$$f(x + 2\,L) = f(x)\,, \quad para \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{22}$$

e integrável em $[-L\,, L]$. *Então*

$$\int_0^{2\,L} f(x)\,dx = \int_{-L}^{L} f(x)\,dx\,. \tag{23}$$

Em geral, temos que para cada $x_o \in \mathbb{R}$ *fixado, teremos*

$$\int_{x_o - L}^{x_o + L} f(x)\,dx = \int_{-L}^{L} f(x)\,dx\,. \tag{24}$$

Demonstração: De uma Proposição visto, temos

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \int_{-L}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2L} f(x)\,dx + \int_{2L}^{L} f(x)\,dx\,. \qquad (25)$$

$$\text{Se} \quad y = g(x) \doteq x - 2L \qquad (26)$$

que é bijetora e continuamente diferenciável em $\mathbb{R}$,

$$\text{logo:} \quad dy = g'(x)\,dx \overset{(26)}{=} dx\,, \qquad (27)$$

$$\text{e se} \quad x = 2L\,, \quad \text{de (26), teremos:} \quad y = 0 \qquad (28)$$

$$\text{e se} \quad x = L\,, \quad \text{de (26), teremos:} \quad y = -L\,. \qquad (29)$$

Logo, do Teorema 0.2, segue que

$$\int_{2L}^{L} f(x)\,dx \overset{(26),(27),(28),(29)}{=} \int_{0}^{-L} f(y + 2L)\,dy$$

$$\overset{(22)}{=} \int_{0}^{-L} f(y)\,dy = -\int_{-L}^{0} f(y)\,dy\,. \qquad (30)$$

Portanto, substituindo (30) em (30), segue que

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \int_{-L}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2L} f(x)\,dx - \int_{-L}^{0} f(x)\,dx$$
$$= \int_{0}^{2L} f(x)\,dx\,,$$

como queríamos mostrar.
Deixaremos a verificação (24) como exercício para o leitor.

□

Proposição

Seja $f : [-a\,,a] \to \mathbb{R}$ *é uma função par, isto é,*

$$f(-x) = f(x)\,, \quad \textit{para} \quad x \in [-a\,,a] \qquad (31)$$

e integrável em $[-a\,,a]$. *Então*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx\,. \qquad (32)$$

Demonstração: de uma Proposição vista, segue que

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx\,. \tag{33}$$

$$\text{Se} \quad y = g(x) \doteq -x \tag{34}$$

que é bijetora e continuamente diferenciável em $\mathbb{R}$, teremos:

$$dy = g'(x)\,dx \stackrel{(34)}{=} -dx\,. \tag{35}$$

$$\text{Logo, se:} \quad x = -a\,, \text{ de (34), teremos:} \quad y = a \tag{36}$$

$$\text{e se} \quad x = 0\,, \text{ de (34), teremos: } y = 0\,, \quad \text{logo:} \tag{37}$$

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx \stackrel{(34),(35),(36),(37)}{=} -\int_{a}^{0} f(y) = \int_{0}^{a} f(y)\,dy\,. \tag{38}$$

e substituindo-se (38) em (33) obteremos

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx\,,$$

como queríamos mostrar.

Proposição

Seja $f : [-a\,,a] \to \mathbb{R}$ *é uma função ímpar, isto é,*

$$f(-x) = -f(x)\,, \quad para \quad x \in [-a\,,a] \tag{39}$$

e integrável em $[-a\,,a]$*. Então*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0\,. \tag{40}$$

Demonstração: de uma Proposição vista, temos que

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx\,. \tag{41}$$

$$\text{se} \quad y = g(x) \doteq -x \tag{42}$$

que é bijetora e continuamente diferenciável em $\mathbb{R}$, teremos:

$$dy = g'(x)\,dx \overset{(34)}{=} -dx\,, \tag{43}$$

Além disso

$$\text{se} \quad x = -a \, , \text{de (34), teremos: } y = a \tag{44}$$

$$\text{e se} \quad x = 0 \, , \text{de (34), teremos: } y = 0 \, . \tag{45}$$

$$\int_{-a}^{0} f(x)\, dx \overset{(42),(43),(44),(45)}{=} \int_{a}^{0} f(-y)\,(-dy) \overset{(39)}{=} -\int_{0}^{a} f(y)\, dy \, ,$$

ou seja,
$$\int_{-a}^{0} f(x)\, dx = -\int_{0}^{a} f(y)\, dy \, . \tag{46}$$

Portanto substituindo-se (46) em (41), obteremos:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = -\int_{0}^{a} f(y)\, dy + \int_{0}^{a} f(x)\, dx = 0 \, ,$$

como queríamos mostrar.

□