Integrais indefinidas de funções reais de uma variável real

Definição

Seja $f : A \to \mathbb{R}$, se existir uma função $F : A \to \mathbb{R}$, que seja diferenciável em A, tal que

$$F'(x) = f(x)\,, \quad para \quad x \in A\,. \tag{1}$$

ela será denominada **primitiva a função f no conjunto A**.

Exemplo

Mostre que a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$F(x) \doteq x^3 - 2\,x^2 + x\,, \quad para \quad x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

é uma primitiva da função F em $\mathbb{R}$, dada por

$$f(x) \doteq 3\,x^2 - 4\,x + 1\,, \quad para \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{3}$$

Resolução: notemos que, a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$F'(x) \overset{(2)}{=} \frac{d}{dx}\left[x^3 - 2\,x^2 + x\right] = 3\,x^2 - 4\,x + 1 \overset{(3)}{=} f(x)\,, \;\; \text{para } x \in \mathbb{R}\,,$$

mostrando, pela Definição 0.1, que a função $\underline{F}$ é uma primitiva da função $\underline{f}$ em $\mathbb{R}$.

$\square$

Exemplo

Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, dada por*

$$f(x) \doteq \cos(x)\,, \;\; para\; x \in \mathbb{R}\,. \tag{4}$$

Mostre que a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, dada por*

$$F(x) \doteq \operatorname{sen}(x)\,, \;\; para \;\; x \in \mathbb{R} \tag{5}$$

é uma primitiva da função $\underline{f}$ *em* $\mathbb{R}$*.*

Resolução: notemos que a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e, além disso, para $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$F'(x) \overset{(5)}{=} \frac{d}{dx}[\operatorname{sen}(x)] = \cos(x) \overset{(4)}{=} f(x),$$

mostrando, pela Definição 0.1, que a função $\underline{F}$ é uma primitiva da função $\underline{f}$ em $\mathbb{R}$.

$\square$

Propriedades da primitiva

Proposição

Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$ não vazio e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função.

1. *Se a função $F : A \to \mathbb{R}$ é uma primitiva da função $\underline{f}$ no conjunto $\underline{A}$ e $C \in \mathbb{R}$, então a função $G : A \to \mathbb{R}$, dada por*

$$G(x) \doteq F(x) + C\,, \quad para \quad x \in A\,, \tag{6}$$

será um primitiva da função $\underline{f}$ no conjunto $\underline{A}$.

2. *Se o conjunto $\underline{A}$ é um* **intervalo de $\mathbb{R}$** *e as funções $F\,, G : A \to \mathbb{R}$ são primitivas da função $\underline{f}$ no conjunto $\underline{A}$, então podemos encontrar $C \in \mathbb{R}$, de modo que*

$$G(x) = F(x) + C\,, \quad para \quad x \in A\,. \tag{7}$$

Demonstração: **Do item 1.:**

Como a função $\underline{F}$ é uma primitiva da função $\underline{f}$ no conjunto $\underline{A}$, pela Definição 0.1, temos que a função $F : A \to \mathbb{R}$ é diferenciável no conjunto $\underline{A}$ e, além disso, temos

$$F'(x) = f(x)\,, \quad \text{para} \quad x \in A\,. \tag{8}$$

Logo a função $G : A \to \mathbb{R}$, dada por

$$G(x) \doteq F(x) + C\,, \quad \text{para} \quad x \in A\,, \tag{9}$$

será diferenciável no conjunto $\underline{A}$ e, além disso, para $x \in A$, temos

$$G'(x) \overset{(9)}{=} \frac{d}{dx}[F(x) + C] = F'(x) + \underbrace{\frac{d}{dx}[C]}_{=0} \overset{(8)}{=} f(x)\,,$$

mostrando, pela Definição 0.1, que a função $\underline{G}$ também é uma primitiva da função $\underline{f}$ no conjunto $\underline{A}$.

Do item 2. :

Como as funções F , G são primitivas da função $\underline{f}$ no conjunto $\underline{A}$, então elas são diferenciáveis no conjunto $\underline{A}$ e, para $x \in A$, teremos:

$$F'(x) = f(x) = G'(x)\,, \text{ para } x \in A\,. \tag{10}$$

Logo a função $h : A \to \mathbb{R}$, dada por

$$h(x) \doteq G(x) - F(x)\,, \text{ para } x \in A\,, \tag{11}$$

será uma função diferenciável no conjunto $\underline{A}$ e, além disso, para $x \in A$, teremos:

$$h'(x) \overset{(11)}{=} \frac{d}{dx}[G(x) - F(x)] = G'(x) - F'(x) \overset{(10)}{=} f(x) - f(x) = 0\,.$$

Como o conjunto $\underline{A}$ é um intervalo de $\mathbb{R}$ segue, de um resultado de Cálculo I, que podemos encontrar $C \in \mathbb{R}$, de modo que

$$h(x) = C\,, \text{ para } x \in A\,,$$

ou seja, de (11), teremos: $G(x) = F(x) + C\,, \text{ para } x \in A\,,$

como queríamos mostrar. $\square$

Integrais indefinidas

Observação

Se o conjunto $\underline{A}$ é um intervalo de $\mathbb{R}$ e a função $F : A \to \mathbb{R}$ é uma primitiva da função $\underline{f}$ no conjunto $\underline{A}$, então qualquer outra primitiva, que indicaremos por $G : A \to \mathbb{R}$, da função $\underline{f}$ deverá ser da forma

$$G(x) = F(x) + C\,, \quad \textit{para} \quad x \in A\,, \tag{12}$$

para algum $C \in \mathbb{R}$ e com isto temos a:

Definição

Dada uma função $f : A \to \mathbb{R}$ a coleção formada por todas as funções primitivas da função $\underline{f}$ no conjunto $\underline{A}$, será denominada **integral indefinida da função $\underline{f}$ no conjunto $\underline{A}$** *e indicada por*

$$\int f(x)\,dx \doteq \{F : A \to \mathbb{R}\,;\ F \text{ é uma primitiva da função } \underline{f} \text{ em } A\}\,.$$

Observação

Notemos que se o conjunto $\underline{A}$ *é um intervalo de* $\mathbb{R}$*, se a função* $F : A \to \mathbb{R}$ *é uma primitiva da função* $\underline{f}$ *no conjunto* $\underline{A}$ *então,*

$$\int f(x)\,dx = \{\, G : A \to \mathbb{R}\,; \\ \text{onde } G(x) = F(x) + C\,,\ \text{para } x \in A \text{ e } C \in \mathbb{R}\,\}\,. \tag{13}$$

Por abuso de notação, escreveremos:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C\,, \quad \text{para} \quad x \in A\,, \tag{14}$$

onde $C \in \mathbb{R}$ *é arbitrária.*

Exemplo

Calcule a integral indefinida $\int f(x)\,dx$*, onde a função* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *é dada por*

$$f(x) \doteq 3\,x^2 - 4\,x + 1\,, \quad \textit{para} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{15}$$

Resolução: notemos que a função $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por

$$F(x) \doteq x^3 - 2\,x^2 + x\,, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{16}$$

é uma primitiva da função $\underline{f}$ em $\mathbb{R}$.
Como $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ é um intervalo, da Observação 0.2, segue

$$\int f(x)\,dx = \{G:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\text{onde } G(x) = F(x) + C,\ \text{para } x, C \in \mathbb{R}\}\,,$$

$$\overset{(16)}{=} \{G:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ \text{onde } G(x) = x^3 - 2\,x^2 + x + C\,,\ \text{para } x, C \in \mathbb{R}\}\,,$$

ou:: $\displaystyle\int \left(3\,x^2 - 4\,x + 1\right)\,dx \overset{(14)}{=} F(x) + C \overset{(16)}{=} x^3 - 2\,x^2 + x + C\,,$

para $x \in \mathbb{R}$, onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrária. $\square$

Exemplo

Calcule $\displaystyle\int cos(x)\,,dx$ *em* $\mathbb{R}$.

<u>**Resolução:**</u> notemos que a função $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por

$$F(x) \doteq \operatorname{sen}(x)\,, \quad \text{para} \quad x\in\mathbb{R}\,, \tag{17}$$

é uma primitiva da função $\underline{f}$ em $\mathbb{R}$.
Como $\mathbb{R}=(-\infty\,,\infty)$, é um intervalo, da Observação (0.2), segue

$$\int f(x)\,dx = \{G:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ \text{onde } G(x)=F(x)+C\,, \text{para } x, C\in\mathbb{R}\}\,,$$

$$= \{G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,;\ \text{onde } G(x)=\operatorname{sen}(x)+C\,,\ \text{para } x, C\in\mathbb{R}\}\,,$$

ou: $\displaystyle\int \cos(x)\,dx \overset{(14)}{=} F(x)+C \overset{(17)}{=} \operatorname{sen}(x)+C\,,\ \text{para}\ \ x\in\mathbb{R}\,,$

onde $C\in\mathbb{R}$ é arbitrária.

Propriedades da integral indefinida

Proposição

Se $\underline{A}$ *um intervalo de* $\mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ *funções,* $a, r \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$, *então:*

$$\int (a\, f)(x)\, dx = a \int f(x)\, dx\,, \ \ para\ x \in A\,;$$

$$\int (f + g)(x)\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx\,, \ \ para\ x \in A\,;$$

$$\int (f - g)(x)\, dx = \int f(x)\, dx - \int g(x)\, dx\,, \ \ para\ x \in A\,;$$

$$\int x^n\, dx = \frac{1}{n+1}\, x^{n+1} + C\,, \ \ para\ x \in \mathbb{R}\,;$$

Se $x \in (0\,, \infty)$: $\displaystyle \int x^r\, dx = \begin{cases} \dfrac{1}{r+1}\, x^{r+1} + C\,, & se\ r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\,, \\ \ln(x)\,, & se\ r = -1 \end{cases}.$

Observação

1. *Com os itens da Proposição 0.2 podemos obter a integral indefinida de qualquer função polinomial.*
2. *Notemos que*

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln(|x|) + C\,, \quad \textit{para} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,, \tag{18}$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrária, pois a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) \doteq \ln(|x|)\,, \quad \textit{para} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,, \tag{19}$$

é uma composta de funções diferenciáveis e, pela regra da cadeia será uma função diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e

$$\frac{d}{dx}[\ln(|x|)] = \frac{1}{x}\,, \quad \textit{para} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Exercício

Calcular as seguintes integrais indefinidas

1. $$\int \left(4\,x^2 - 3\,x + 2\right)\,dx\,, \quad para \quad x \in \mathbb{R} \tag{20}$$
2. $$\int \left[\sec^2(x) + \operatorname{sen}(x) + \frac{1}{1+x^2}\right]\,dx\,, \quad para \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right)\,. \tag{21}$$

Resolução:

Do item 1.:

Da Proposição 0.2 acima, segue que:

$$\int \left(4\,x^2 - 3\,x + 2\right)\,dx = \int \left(4\,x^2\right)\,dx + \int (-3\,x)\,dx + \int 2\,dx$$

$$= 4\int x^2\,dx - 3\int x\,dx + 2\int 1\,dx = 4\,\frac{1}{3}\,x^3 - 3\,\frac{1}{2}\,x^2 + 2\,x + C$$

$$= \frac{4}{3}\,x^3 - \frac{3}{2}\,x^2 + 2\,x + C\,, \text{ para } x \in \mathbb{R}\,, \text{onde } C \in \mathbb{R} \text{ é arbitrária.}$$

Do item 2.:

Notemos que, para $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[\operatorname{tg}(x)] &= \sec^2(x)\,, \\ \frac{d}{dx}[-\cos(x)] &= \operatorname{sen}(x)\,, \\ \frac{d}{dx}[\operatorname{arctg}(x)] &= \frac{1}{1+x^2}\,. \end{aligned} \tag{22}$$

Da Proposição 0.2 acima, segue que:

$$\int \left[\sec^2(x) + \operatorname{sen}(x) + \frac{1}{1+x^2}\right] dx = \int \sec^2(x)\,dx + \int \operatorname{sen}(x)\,dx$$

$$+ \int \frac{1}{1+x^2}\,dx \overset{(22)}{=} \operatorname{tg}(x) - \cos(x) + \operatorname{arctg}(x) + C\,,$$

para $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrária.

$\square$

Técnicas de integração: Substituição direta

Teorema

Sejam $A\,,B \subseteq \mathbb{R}$ *intervalos de* $\mathbb{R}$, $g : A \to B$ *uma função diferenciável em* $\underline{A}$ *e* $f : B \to \mathbb{R}$ *uma funções que admite a função* $F : B \to \mathbb{R}$ *como uma primitiva definida em* $\underline{B}$. *Então a função* $H : A \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$H(x) \doteq F[g(x)]\,, \quad para \quad x \in A\,, \tag{23}$$

é uma primitiva da função $h : A \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$h(x) \doteq f[g(x)]\,g'(x)\,, \quad para \quad x \in A\,, \tag{24}$$

$$assim, \int f[g(x)]\,g'(x)\,dx = F[g(x)] + C\,, para\ x \in A\,, \tag{25}$$

onde $C \in \mathbb{R}$ *é arbitrária.*

Demonstração: como a função $F : B \to \mathbb{R}$ é primitiva da função $\underline{f}$ em $\underline{B}$ segue que a função $\underline{f}$ será diferenciável em $\underline{B}$ e, além disso

$$F'(y) = f(y)\,, \quad \text{para} \quad y \in B\,. \tag{26}$$

Como a função $\underline{g}$ é diferenciável em $\underline{A}$, da regra da cadeia (visto no Cálculo I), segue que a função $H \doteq F \circ g$, será diferenciável em $\underline{A}$ e, além disso, para $x \in A$, temos:

$$H'(x) \overset{(23)}{=} \frac{d}{dx}[F \circ g](x) \overset{\text{regra da cadeia}}{=} F'[g(x)]\,g'(x) \overset{(26)}{=} f[g(x)]\,g'(x)\,,$$

ou seja, a função $H = F \circ g$ é uma primitiva de $h = (f \circ g)\,g'$,

ou ainda, $\displaystyle\int f[g(x)]\,g'(x)\,dx = F[g(x)] + C\,, \quad \text{para} \quad x \in A\,,$

onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrária.

$\square$

Observação

A conclusão do Teorema 0.1 acima, nos diz como fazer uma "mudanças de variáveis" na integral indefinida, a saber:

$$\int f(u)\,du \overset{se\ u \doteq g(x)\,,então\,du = g\,'(x)\,dx}{=} \int f[g(x)]\,g\,'(x)\,dx \qquad (27)$$

e ao final do cálculo da integral indefinida do lado esquerdo de (27), *voltamos a variável original* $\underline{u}$, *ou seja, fazemos*

$$x = g^{-1}(u)\,. \qquad (28)$$

Neste caso, a substituição

$$u \doteq g(x)\,, \quad para \quad x \in A\,, \qquad (29)$$

deverá ser uma mudança de variáveis continuamente diferenciável em $\underline{A}$, *em particular, deverá ser* **bijetora !**.

Observação

A conclusão do Teorema 0.1 *acima, pode ser reescrito da seguinte forma:*

$$\int f[g(x)])\, g'(x)\, dx \overset{se\, u \doteq g(x)\,,\, então\, du = g'(x)\, dx}{=} \int f(u)\, du$$
$$\overset{se\ F'(u) = f(u)}{=} F(u) + C$$
$$\overset{u = g(x)}{=} F[g(x)] + C\,, \quad para \quad x \in A\,, \qquad (30)$$

onde $C \in \mathbb{R}$ *é arbitrária.*

Exemplo

Calcular $\displaystyle\int \frac{1}{(a\,x+b)^2}\, dx$, *para* $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{b}{a}\right\}$, *onde* $a \neq 0$ *e* $b \in \mathbb{R}$ *estão fixos.*

Resolução: sejam $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f : (0\,,\infty) \to \mathbb{R}$ funções dadas por

$$g(x) \doteq a\,x + b\,,\ \text{para } x \in \mathbb{R} \tag{31}$$

$$f(y) \doteq \frac{1}{y^2}\,,\ \text{para } y \in (0\,,\infty)\,. \tag{32}$$

Notemos que a função $\underline{g}$ será diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$g'(x) = a\,,\ \text{para } x \in \mathbb{R} \tag{33}$$

e a função $F : (0\,,\infty) \to \mathbb{R}$, dada por:

$$F(y) \doteq \frac{-1}{y}\,,\ \text{para } y \in (0\,,\infty)\,, \tag{34}$$

será uma primitiva da função $\underline{f}$.

Logo, pelo Teorema 0.1, segue que

$$\int \frac{1}{(a\,x+b)^2}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{(a\,x+b)^2}\,a\,dx$$

$$\overset{(32)\text{ e }(33)}{=} \frac{1}{a}\int f[g(x)]\,g'(x)\,dx \overset{(25)}{=} \frac{1}{a}\{F[g(x)]+D\}$$

$$\overset{(34)}{=} \frac{1}{a}\left[\frac{-1}{a\,x+b}+D\right] \overset{\text{seja } C \doteq \frac{D}{a}}{=} \frac{1}{a}\,\frac{-1}{a\,x+b}+C\,,\ \text{ para } x\in\left(-\frac{b}{a}\,,\infty\right)\,,$$

ou seja,

$$\int \frac{1}{(a\,x+b)^2}\,dx = \frac{-1}{a\,(a\,x+b)}+C\,,\text{para } x\in\left(-\frac{b}{a}\,,\infty\right)\,, \tag{35}$$

onde $C\in\mathbb{R}$ é arbitrária.

De modo semelhante tratamos o caso $(-\infty\,,-\frac{b}{a})$ (ver notas de aula).

$\square$

Exemplo

Calcular $\int \operatorname{sen}^2(x)\cos(x)\,dx$, *para* $x \in \mathbb{R}$.

Resolução: para $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$\int \operatorname{sen}^2(x)\cos(x)\,dx \overset{\left\{\begin{array}{l} \text{se } u \doteq \operatorname{sen}(x)\,, \\ \text{então: } du = \frac{d}{dx}[\operatorname{sen}(x)]\,dx \\ = \cos(x)\,dx \end{array}\right\}}{=}$$

$$\int \underbrace{\operatorname{sen}^2(x)}_{=u^2}\underbrace{\cos(x)\,dx}_{=du} = \int u^2\,du = \frac{1}{3}u^3 + C$$

$$\text{como } \overset{u=\operatorname{sen}(x)}{=} \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3(x) + C\,, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

ou seja, $\int \operatorname{sen}^2(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3(x) + C$, para $x \in \mathbb{R}$,

onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrária. $\square$

Exemplo

Calcular $\int x^2 \sqrt{1+x}\, dx$, *para* $x \in (-1, \infty)$.

Resolução: para $x \in (-1, \infty)$, teremos:

$$\int x^2 \sqrt{1+x}\, dx \quad \begin{cases} \text{se: } u \doteq \sqrt{x+1} \text{ teremos: } x = u^2 - 1 \\ \text{ou: } u^2 = x + 1 \text{, então: } \frac{d}{du}\left[u^2\right] du = \frac{d}{dx}[x+1]\, dx\,, \\ \text{ou seja: } 2\, u\, du = dx \end{cases} =$$

$$\int \underbrace{x^2}_{=u^2-1} \underbrace{\sqrt{1+x}}_{=u} \underbrace{dx}_{=2\,u\,du} = \int \left(u^2 - 1\right)^2 u\, 2\, u\, du$$

$$\overset{\text{exercício}}{=} \int \left(2\, u^6 - 4\, u^4 + 2\, u^2\right) du = \frac{2}{7} u^7 - \frac{4}{5} u^5 + \frac{2}{3} u^3 + C$$

$$\text{como } \overset{u=\sqrt{x+1}}{=} \frac{2}{7}\left(\sqrt{x+1}\right)^7 - \frac{4}{5}\left(\sqrt{x+1}\right)^5 + \frac{2}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 + C\,,$$

ou: $\int x^2 \sqrt{1+x}\, dx = \frac{2}{7}(x+1)^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C\,,$

para $x \in (-1, \infty)$, onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrária.

Integração por partes para integral indefinida

Teorema

Sejam A um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f\,,g : A \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis em A. Então, para $x \in A$, temos

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int g(x)\,f'(x)\,dx\,. \qquad (36)$$

Demonstração: como $\underline{f}$ e $\underline{g}$ são diferenciáveis em $\underline{A}$, segue que $f \cdot g$ será diferenciável em $\underline{A}$. Além disso, para $x \in A$, temos:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)\,,$$

ou ainda, $f(x)\,g'(x) = (f \cdot g)'(x) - f'(x)\,g(x)\,,$ $\qquad (37)$

logo $\displaystyle\int f(x)\,g'(x)\,dx \overset{(37)}{=} \int \left[(f \cdot g)'(x) - f'(x)\,g(x)\right]\,dx$

$$= \int (f \cdot g)'(x)\,dx - \int f'(x)\,g(x)\,dx = (f \cdot g)(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$$

$$= f(x)\,g(x) - \int g(x)\,f'(x)\,dx\,, \quad \text{para} \quad x \in A\,.$$

Observação

Notemos que, aplicando o Teorema 0.1 a ambos os lados das integrais indefinidas (36) acima, obteremos:

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx \left\{ \begin{array}{l} \text{se } u \doteq f(x) \text{ e } v \doteq g(x) \\ \text{então: } dv = g'(x)\,dx \end{array} \right\} \underset{}{=}$$

$$\int \underbrace{f(x)}_{=u}\,\underbrace{g'(x)\,dx}_{=dv} = \int u\,dv\,, \tag{38}$$

$$\int g(x)\,f'(x)\,dx \left\{ \begin{array}{l} \text{se } u \doteq f(x) \text{ e } v \doteq g(x) \\ \text{então : } du = f'(x)\,dx \end{array} \right\} = \int \underbrace{g(x)}_{=u}\,\underbrace{f'(x)\,dx}_{=dv}$$

$$= \int v\,du\,. \tag{39}$$

Observação

Logo, de (38) *e* (39), *podemos reescrever* (36), *como:*

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du\,. \tag{40}$$

Exemplo

Calcular $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2(x)\,dx\,,$ *para* $x \in \mathbb{R}$.

Resolução: como

$$\int \operatorname{sen}^2(x)\,dx = \int \underbrace{\operatorname{sen}(x)}_{\doteq u}\,\underbrace{\operatorname{sen}(x)\,dx}_{\doteq dv} = \int u\,dv$$

$$\stackrel{(40)}{=} = u\,v - \int v\,du \tag{41}$$

como: $u = \operatorname{sen}(x)$, então: $du = \dfrac{d}{dx}[\operatorname{sen}(x)]\,dx = \cos(x)\,dx$,

como $dv \doteq \operatorname{sen}(x)\,dx$, então $v = \displaystyle\int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x) + C$,

se $C = 0$, então: $v = -\cos(x)$

$$= \underbrace{\operatorname{sen}(x)}_{=u}\,\underbrace{[-\cos(x)]}_{=v} - \int \underbrace{[-\cos(x)]}_{=v}\,\underbrace{\cos(x)\,dx}_{=du}$$

$$= -\operatorname{sen}(x)\,\cos(x) + \int \cos^2(x)\,dx$$

$$= -\operatorname{sen}(x)\,\cos(x) + \int \left[1 - \operatorname{sen}^2(x)\right]\,dx$$

$$= -\operatorname{sen}(x)\,\cos(x) + \int 1\,dx - \int \operatorname{sen}^2(x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\,x) + x - \int \operatorname{sen}^2(x)\,dx,$$

logo: $$\int \operatorname{sen}^2(x)\,dx = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\,x) + x - \int \operatorname{sen}^2(x)\,dx\,,$$

ou seja, $$2\int \operatorname{sen}^2(x)\,dx = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\,x) + x + D\,,$$

ou: $$\int \operatorname{sen}^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\,x) + C \qquad (42)$$

para $x \in \mathbb{R}$, onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrário. $\square$

Exemplo

Calcular $\int \operatorname{arcsen}(x)\,dx$, *para* $x \in (-1\,,1)$.

Resolução: notemos que

$$\int \operatorname{arcsen}(x)\,dx = \int \underbrace{\operatorname{arcsen}(x)}_{\doteq u}\,\underbrace{dx}_{\doteq dv} = \int u\,dv$$

$$\stackrel{(40)}{=} u\,v - \int v\,du$$

$$\left\{\begin{array}{l} u \doteq \operatorname{arcsen}(x)\,, \text{então: } \; du = \dfrac{d}{dx}[\operatorname{arcsen}(x)]\,dx = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\[2em] dv \doteq dx\,, \text{então: } \; v = \displaystyle\int 1\,dx = x + C\,, \\ \text{se } C = 0, \text{ então: } \; v = x \end{array}\right\}$$

$$=$$

$$= \underbrace{\operatorname{arcsen}(x)}_{=u}\,\underbrace{x}_{=v} - \int \underbrace{x}_{=v}\,\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx}_{=du}$$

$$= x\,\operatorname{arcsen}(x) - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,x\,dx$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{se } w \doteq 1 - x^2 \text{, entao: } dw = -2\,x\,dx\,, \\ \text{ou: } -\dfrac{1}{2}\,dw = x\,dx \end{array} \right\}$$

$$=$$

$$= x\,\mathrm{arcsen}(x) - \int \frac{1}{\sqrt{\underbrace{1 - x^2}_{=w}}}\,\underbrace{x\,dx}_{-\frac{1}{2}\,dw}$$

$$= x\,\mathrm{arcsen}(x) - \int \frac{1}{\sqrt{w}}\left(-\frac{1}{2}\right)\,dw \;= x\,\mathrm{arcsen}(x) + \frac{1}{2}\int w^{-\frac{1}{2}}\,dw$$

$$= x\,\mathrm{arcsen}(x) + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\frac{1}{2}}\,w^{\frac{1}{2}}\right] + C \overset{w=1-x^2}{=} x\,\mathrm{arcsen}(x) + (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} + C\,,$$

ou seja, $\displaystyle\int \mathrm{arcsen}(x)\,dx = x\,\mathrm{arcsen}(x) + \sqrt{1 - x^2} + C\,,$

para $x \in (-1\,,1)$, onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrário. □

Exercício

Calcular $\int x \operatorname{sen}(x)\, dx$, *para* $x \in \mathbb{R}$.

Resolução: notemos que

$$\int x \operatorname{sen}(x)\, dx = \int \underbrace{x}_{=u} \cdot \underbrace{\operatorname{sen}(x)\, dx}_{=dv} = \int u\, dv \overset{(40)}{=} u\, v - \int v\, du$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{se } u \doteq x \text{, então: } du = \dfrac{d}{dx}[x]\, dx = 1\, dx \\ \\ \text{se } dv \doteq \operatorname{sen}(x)\, dx \text{, então: } v = \displaystyle\int \operatorname{sen}(x)\, dx = -\cos(x) + C\,, \\ \text{se } C = 0, \text{ então: } v = -\cos(x) \end{array} \right\}$$

$$= \underbrace{x}_{=u}\, \underbrace{[-\cos(x)]}_{=v} - \int \underbrace{[-\cos(x)]}_{=v}\, \underbrace{dx}_{=du} = -x \cos(x) + \underbrace{\int \cos(x)\, dx}_{=sen(x)+C}$$

$$= -x \cos(x) + \operatorname{sen}(x) + C\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

De modo semelhante podemos tratar o (veja as notas de aula):

Exercício

Calcular

$$\int x^n \operatorname{sen}(x)\, dx \quad e \quad \int x^n \cos(x)\, dx\,,$$

para $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo

Calcule $\displaystyle\int e^x \cos(x)\, dx\,,$ *para* $x \in \mathbb{R}$.

Resolução: observemos que

$$\underbrace{\int \underbrace{e^x}_{=u} \underbrace{\cos(x)\, dx}_{=dv}}_{\doteq I} = \int u\, dv \overset{(40)}{=} u\, v - \int v\, du$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{se: } u \doteq e^x \text{, então: } du = \dfrac{d}{dx}[e^x]\, dx = e^x\, dx \\[2em] \text{e se: } dv \doteq \cos(x)\, dx \text{, teremos } v = \operatorname{sen}(x) \end{array} \right\}$$

$$= \underbrace{e^x}_{=u} \underbrace{\operatorname{sen}(x)}_{=v} - \int \underbrace{e^x}_{=v} \underbrace{\operatorname{sen}(x)\, dx}_{=du} = e^x \operatorname{sen}(x) - \int \underbrace{e^x}_{\doteq U} \underbrace{\operatorname{sen}(x)\, dx}_{\doteq dV}$$

$$\overset{(40)}{=} e^x \operatorname{sen}(x) - \left[U\, V - \int V\, dU \right]$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{se: } U \doteq e^x \text{, então: } du = \dfrac{d}{dx}[e^x]\, dx = e^x\, dx \\[2em] \text{e se: } dv \doteq \operatorname{sen}(x)\, dx \text{, teremos: } v = -\cos(x) \end{array}\right\}$$

$$=$$

$$= e^x \operatorname{sen}(x) - \left[\underbrace{e^x}_{=U}\underbrace{[-\cos(x)]}_{=V} - \int \underbrace{e^x}_{=V}\underbrace{(-\cos(x))\, dx}_{=dU}\right]$$

$$= e^x\,[\operatorname{sen}(x) + \cos(x)] - \underbrace{\int e^x \cos(x)\, dx}_{=I}.$$

logo $2\displaystyle\int e^x \cos(x)\, dx = e^x\,[\operatorname{sen}(x) + \cos(x)] + C\,,$

ou seja, $\displaystyle\int e^x \cos(x)\, dx = e^x\, \frac{\operatorname{sen}(x) + \cos(x)}{2} + C\,,$ para $x \in \mathbb{R}$,

onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrário.

Nas notas resolvemos também os:

Exercício

Calcular a integral indefinida

$$\int x\,\operatorname{arctg}(x)\,dx\,, \quad \textit{para} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right)\,.$$

Exercício

Calcular a integral indefinida $\displaystyle\int \ln(x)\,dx$, *para* $x \in (0\,,\infty)$.