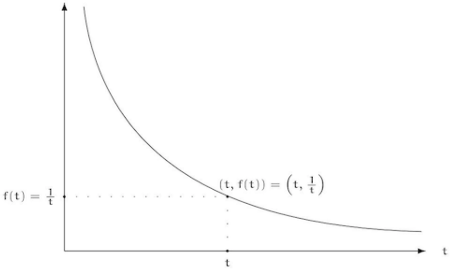
Aplicações da integral definida

Começaremos pela:

A função logaritmo natural

Consideremos a representação geométrica do gráfico da função $f : (0\,,\infty) \to \mathbb{R}$, dada por (veja a figura abaixo)

$$f(t) \doteq \frac{1}{t}\,, \quad \text{para} \quad t \in (0\,,\infty)\,. \tag{1}$$



Como a função $f : (0\,,\infty) \to \mathbb{R}$, dada por (1) é contínua em $(0\,,\infty)$ será integrável em qualquer intervalo limitado e fechado contido em $(0\,,\infty)$, assim podemos introduzir a:

Definição

Para cada $x \in (0\,,\infty)$, definimos o **logaritmo natural de $\underline{x}$**, *como sendo*

$$\ln(x) \doteq \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

e assim temos definida a **função logaritmo (natural)** *indicada por* $\ln : (0\,,\infty) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\ln(x) \doteq \int_1^x \frac{1}{t}\,dt\,, \quad para\ x \in (0\,,\infty)\,.$$

Propriedades da função logaritmo

Proposição

$\ln(1) = 0\,;$

para $x\,,y \in (0\,,\infty)$: $\ln(x\,y) = \ln(x) + \ln(y)\,;$

para $n \in \mathbb{N}$ *e* $x \in (0\,,\infty)$: $\ln\left(x^n\right) = n\ln(x)\,;$

para $x\,,y \in (0\,,\infty)$: $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)\,;$

a função $y = \ln(x)$ *é diferenciável em* $(0\,,\infty)$ *e:*

$\dfrac{d}{dx}[\ln(x)] = \dfrac{1}{x}$, *para* $x \in (0\,,\infty)\,;$

a função $y = \ln(x)$ *é estritamente crescente em* $(0\,,\infty)$ *;*

a função $\ln : (0\,,\infty) \to \mathbb{R}$ *é bijetora.*

Exercício

Mostre que a função $f : \left[0\,,\frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) \doteq \operatorname{tg}(x)$, *para* $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{4}\right]$ *é integrável em* $\left[0\,,\frac{\pi}{4}\right]$ *e encontre* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}(x)\,dx$.

Resolução: como a função f é continua em $\left[0\,,\frac{\pi}{4}\right]$ segue que ela será integrável em $\left[0\,,\frac{\pi}{4}\right]$. Observemos que

$$\int f(x)\,dx = \int \operatorname{tg}(x)\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\,dx \left\langle \begin{array}{l} \text{se } u \doteq \cos(x) \\ \text{então: } du = \operatorname{sen}(x)\,dx \end{array} \right\rangle =$$

$$\int \frac{1}{u}\,du = \ln(u) + C \overset{u=\cos(x)}{=} \ln[\cos(x)] + C\,. \qquad (2)$$

Logo $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}(x)\,dx \overset{\text{Teor. fund. do Cálculo e (2)}}{=} \ln[\cos(x)]\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}}$

$$= \ln[\cos(0)] - \ln\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \underbrace{\ln(1)}_{=0} - \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Nas notas também tratamos dos:

Exercício

Mostre que a função $f : [1\,,2] \to \mathbb{R}$, *dada por* $f(x) \doteq \ln^2(x)\,,$ *para* $x \in [1\,,2]\,,$ *é integrável em* $[1\,,2]$ *e encontre o valor da integral definida* $\displaystyle\int_1^2 \ln^2(x)\,dx\,.$

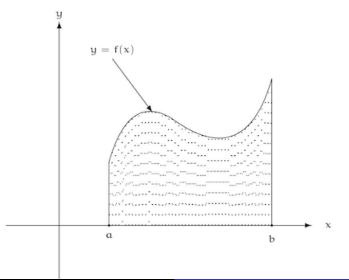
Exercício

Mostre que a função $f : \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, *dada por* $f(x) \doteq e^x\,\mathrm{sen}(x)\,,$ *para* $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]\,,$ *é integrável em* $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ *e encontre o valor da integral definida* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\,\mathrm{sen}(x)\,dx\,.$

Área de regiões delimitadas por gráficos de funções

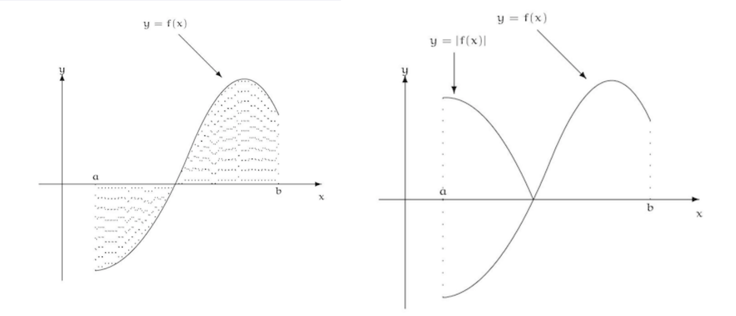
Observação

Vimos anteriormente, se a função $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ é integrável e **não negativa** *em $[a\,,b]$ então o valor da área, que indicaremos por $\underline{\mathcal{A}}$, da região limitada, que chamaremos de $\underline{R}$, contida no plano xOy, delimitada pela representações geométricas dos gráficos da função $\underline{f}$, das retas $x = a$, $x = b$ e do eixo Ox (veja a figura abaixo) será dada por $\mathcal{A} = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ u.a..*



Observação

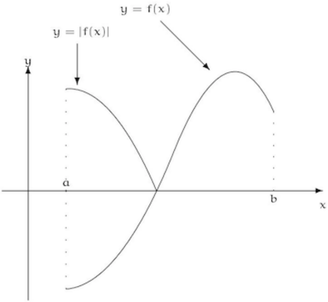
Se a função $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ é integrável em $[a\,,b]$ (pode assumir valores negativos), então o valor da área, que indicaremos $\underline{A}$, da região limitada, que chamaremos de $\underline{R}$, contida no plano xOy, delimitada pelas representações geométricas dos gráficos da função $\underline{f}$, das retas $x = a$, $x = b$ e do eixo Ox (vide figura abaixo à esquerda) pode ser obtida, geometricamente, refletindo-se a parte da representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ que fica abaixo do eixo Ox em torno do eixo Ox (veja a figura abaixo à direita).



Observemos que se considerarmos o valor da área, que indicaremos por $\underline{\mathcal{A}'}$, da região limitada, que chamaremos de $\underline{R'}$, contida no plano xOy, delimitada pelas representações geométricas dos gráficos da função $|f|$, das retas $x = a$, $x = b$ e do eixo Ox (veja a figura abaixo), então teremos que

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}'$$

$$\text{e assim} \quad \mathcal{A} = \int_a^b |f(x)| \, dx \ u.a..$$



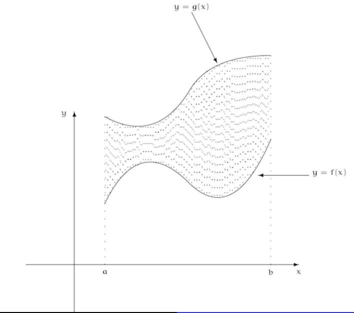
Observação

Suponhamos que $f\,, g : [a\,, b] \to \mathbb{R}$ *são integráveis em* $[a\,, b]$ *e*

$$0 \leq f(x) \leq g(x)\,, \quad para \quad x \in [a\,, b]\,.$$

Então o valor da área, que indicaremos por $\underline{\mathcal{A}}$*, da região limitada, que chamaremos de* $\underline{R}$*, contida no plano* xOy*, delimitada pelas representações geométricas dos gráficos das funções* $\underline{f}$ *e* $\underline{g}$*, das retas* $x = a$*,* $x = b$ *e do eixo* Ox *(veja a figura abaixo) será:*

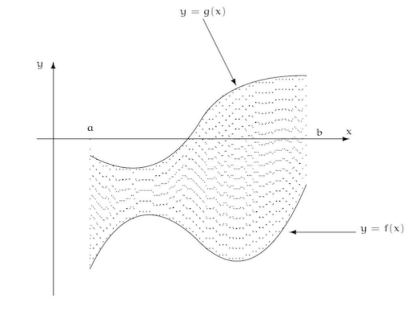
$$\mathcal{A} = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx\,.$$



Observação

Na situação acima podemos considerar somente o caso que, independentemente das funções $\underline{f}$ e g assumirem valores não negativos (veja a figura abaixo):

$$f(x) \leq g(x)\,, \quad \textit{para} \quad x \in [a, b]\,,$$

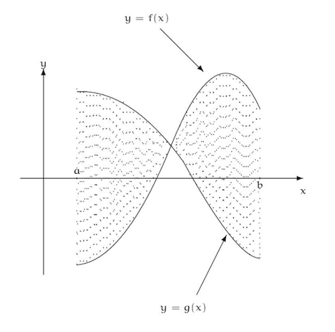


A área da região acima, será dada por: $\mathcal{A} = \displaystyle\int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx\,.$

Observação

Em geral, se f , $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são integráveis em $[a\,, b]$, então o valor da área, que indicaremos por $\underline{\mathcal{A}}$, da região limitada, contida no plano xOy, delimitada pelas representações geométricas dos gráficos da função $\underline{f}$ e $\underline{f}$, das retas $x = a$, $x = b$ e do eixo Ox (veja a figura abaixo) será dada por

$$\mathcal{A} = \int_a^b |g(x) - f(x)|\, dx \ u.a..$$



Exemplo

Sejam $f\,,g\,,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *funções dadas por*

$$f(x) \doteq x+6\,, \tag{3}$$

$$g(x) \doteq x^3\,, \tag{4}$$

$$h(x) \doteq -\frac{x}{2}\,, \quad para \quad x\in\mathbb{R}\,. \tag{5}$$

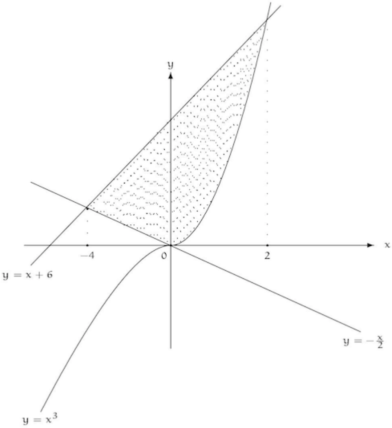
Encontrar o valor da área, que indicaremos por $\underline{A}$*, da região limitada, que indicaremos por* $\underline{R}$*, contida no plano* xOy*, delimitada pelas representações geométricas dos gráficos das funções* $\underline{f}$*,* $\underline{g}$ *e* $\underline{h}$*.*

Resolução: observemos que (veja a figura abaixo)

$$f(x) = h(x) \text{ se, e somente se } x + 6 = -\frac{x}{2}, \text{ ou seja, } x = -4,$$

$$f(x) = g(x) \text{ se, e somente se } x + 6 = x^3, \text{ ou seja, } x = 2,$$

$$g(x) = h(x) \text{ se, e somente se } -\frac{x}{2} = x^3, \text{ ou seja, } x = 0.$$



Como as funções $\underline{f}$, $\underline{g}$ e $\underline{h}$ são contínuas em $\mathbb{R}$, serão integráveis em qualquer intervalo fechado e limitada de $\mathbb{R}$, e assim

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_{-4}^{0} [f(x) - h(x)]\, dx + \int_{0}^{2} [f(x) - g(x)]\, dx \\
&\overset{(3),(4),(5)}{=} \int_{-4}^{0} \left[x + 6 - \left(-\frac{x}{2}\right)\right]\, dx + \int_{0}^{2} \left[x + 6 - x^3\right]\, dx \\
&= \int_{-4}^{0} \left(\frac{3}{2}x + 6\right)\, dx + \int_{0}^{2} \left(x + 6 - x^3\right)\, dx \\
&\overset{\text{Teor. fund. do Cálculo}}{=} \left[\frac{3}{4}x^2 + 6x\right]\Bigg|_{x=-4}^{x=0} + \left[\frac{1}{2}x^2 + 6x - \frac{1}{4}x^4\right]\Bigg|_{x=0}^{x=2} \\
&\overset{\text{exercício}}{=} 22\ u.a.\,,
\end{aligned}$$

$\square$

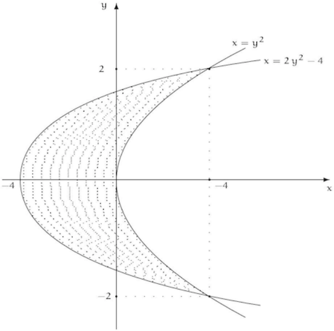
Exercício

Encontre o valor da área, que indicaremos por $\underline{A}$, da região limitada R, contida no plano xOy, delimitada pelas representações geométricas dos gráficos das equações

$$2\,y^2 - x - 4 = 0 \ \ e \ \ x - y^2 = 0\,, \tag{6}$$

contidas no plano xOy.

Resolução: a representação geométrica da região $\underline{R}$ é dada pela figura abaixo.



Observemos que

$$2\,y^2 - 4 = x = y^2\,, \text{ se, e somente se } y^2 = 4\,, \text{ ou seja, } y = \pm 2\,.$$

Considerando-se as funções $f\,,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dadas por

$$f(y) \doteq 2\,y^2 - 4\,, \quad \text{e} \quad g(y) \doteq y^2\,, \text{ para } y \in \mathbb{R}\,,$$

como elas são contínuas em $\mathbb{R}$, serão integráveis em qualquer intervalo fechado e limitado de $\mathbb{R}$, e assim

$$\mathcal{A} = \int_{-2}^{2} |f(y) - g(y)|\,dy = \int_{-2}^{2} \left|\left(2\,y^2 - 4\right) - y^2\right|\,dy$$

$$= \int_{-2}^{2} \left|y^2 - 4\right|\,dy \overset{y^2-4\leq 0\,,\ \text{para}\ y\in[-2\,,2]}{=} \int_{-2}^{2} \left(-y^2 + 4\right)\,dy$$

$$\overset{\text{Teor. fund. do Cálc.}}{=} \left[-\frac{y^3}{3} + 4\,y\right]_{y=-2}^{y=2}$$

$$= \left[-\frac{2^3}{3} + 4\cdot 2\right] - \left[-\frac{(-2)^3}{3} + 4\cdot(-2)\right] \overset{\text{exercício}}{=} \frac{32}{3}\ u.a.\,.$$

Nas notas também tratamos dos:

Exercício

Encontre o valor da área, que indicaremos por $\underline{A}$*, da região limitada, que chamaremos de* $\underline{R}$*, contida no plano* xOy*, delimitada pelas representações geométricas dos gráficos das funções* $\underline{f}$, $\underline{g}$ *e da reta* $x = 3$*, onde as funções* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, são dadas por*

$$f(x) \doteq 2^x\,,$$
$$g(x) \doteq 2^{-x}\,, \quad \textit{para} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Exercício

Encontre o valor da área, que indicaremos por $\underline{A}$*, da região limitada, que chamaremos de* $\underline{R}$*, contida no plano* xOy*, delimitada pelas representações geométricas dos gráficos das funções* $\underline{f}$ *e* $\underline{g}$*, pela reta* $x = 4$*, onde as funções* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *são dadas por*

$$f(x) \doteq x^2 + 3\,x + 5\,,$$
$$g(x) \doteq -x^2 + 5\,x + 9\,, \quad \textit{para} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

e também do:

Exercício

Encontre o valor da área, que indicaremos por $\underline{A}$, *da região limitada, que chamaremos de* $\underline{R}$, *contida no plano* xOy, *delimitada pelas representações geométricas dos gráficos equações*

$$y^2 = x + 4\,,$$
$$x + 2\,y = 4\,,$$

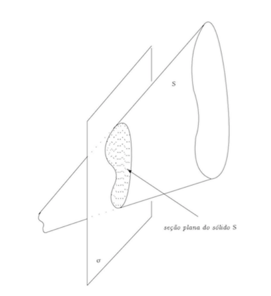
contidas no plano xOy.

Volume de sólidos pelo método das fatias

Seja $\underline{S}$ um sólido limitado contido em $\mathbb{R}^3$.
O objetivo é encontrar um modo de calcular o volume, que indicaremos por $\underline{\mathcal{V}}$, do sólido $\underline{S}$, para isto introduziremos a:

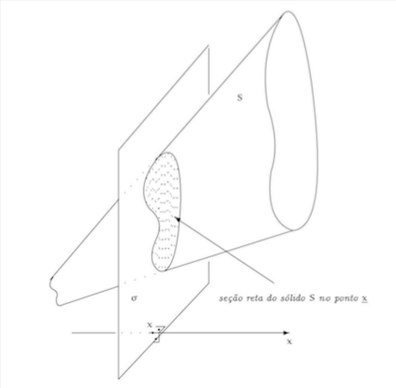
Definição

*Uma **seção plana** do sólido $\underline{S}$ é uma região plana, obtida da intersecção do sólido $\underline{S}$ com um plano de $\mathbb{R}^3$, que indicaremos por $\underline{\sigma}$ (figura abaixo).*



Definição

Dado um sólido $\underline{S}$ *e uma reta* $\underline{r}$*, que identificaremos com eixo* Ox*, interceptando-se o sólido* $\underline{S}$ *com um plano perpendicular à reta* $\underline{r}$ *(ou seja, ao eixo* Ox*) no ponto* $\underline{x}$*, obteremos uma seção plana do sólido* $\underline{S}$ *que chamaremos de* **seção reta do sólido $\underline{S}$ no ponto $\underline{x}$** *(figura abaixo).*



Com isto temos o:

Teorema

(método das fatias) *Suponhamos que o valor das áreas das seções retas do sólido* $\underline{S}$ *seja dada por uma função* $\mathcal{A} : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ *que é contínua em* $[a\,,b]$.
Então o valor do volume, que indicaremos por $\mathcal{V}$, *do sólido* S *será dado por:*

$$\mathcal{V} = \int_a^b \mathcal{A}(x)\,dx \;\; u.v.\,, \tag{7}$$

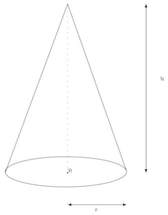
onde $u.v.$ *denota unidade de volume.*

Apliquemos ao:

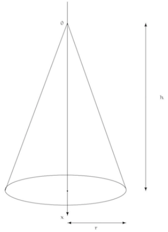
Exemplo

Encontre o valor do volume de um cone circular reto, cujo raio do círculo da base é igual a $r > 0$ *e cuja altura vale* $h > 0$.

Resolução: geometricamente temos



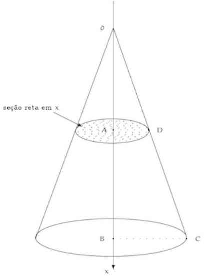
Consideremos a reta $\underline{r}$, isto é, o eixo Ox, como sendo o eixo do cilindro, com origem no seu vértice e orientado para baixo (figura abaixo).



Observemos que para cada

$$x \in [0\,,\, h]\,,$$

a seção reta do cilindro em $\underline{x}$ será um círculo, cujo centro está no eixo Ox, distando $\underline{x}$ unidades do vértice e cujo raio denotaremos por r' (figura abaixo).



Logo, da figura acima, teremos que

$$\overline{OB} = h\,,\ \overline{OA} = x\,,\ \overline{BC} = r \text{ e } \overline{AD} = r'\,. \qquad (8)$$

Os triângulos ΔOBC e ΔOAD são semelhantes (caso AAA):

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}\,, \text{ ou, por (8): } \frac{r'}{r} = \frac{x}{h}\,, \text{ ou ainda, } r' = \frac{r}{h}\,x\,. \tag{9}$$

Logo, para cada $x \in [0\,,h]$, o valor da área, que indicaremos por $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$, da seção reta do cilindro em $\underline{x}$, será dada por

$$\mathcal{A}(x) = \pi\,\left(r'\right)^2 \overset{(9)}{=} \pi\,\left(\frac{r}{h}\,x\right)^2 = \pi\,\frac{r^2}{h^2}\,x^2\,, \tag{10}$$

ou seja, o valor da área da seção reta do cone reto dado será uma função contínua de $\underline{x}$, para $x \in [0\,,h]$, do Teorema do método das fatias, segue que:

$$\mathcal{V} \overset{(7)}{=} \int_a^b \mathcal{A}(x)\,dx \overset{(10)}{=} \int_0^h \pi\,\frac{r^2}{h^2}\,x^2\,dx = \pi\,\frac{r^2}{h^2}\,\int_0^h x^2\,dx$$

$$\overset{\text{Teor. fund. do Cálc.}}{=} \pi\,\frac{r^2}{h^2}\,\left[\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=h} = \frac{1}{3}\,\pi\,r^2\,h\;u.v.\,.$$

Nas notas temos também os:

Exercício

A partir de um triângulo equilátero de lados de comprimento $\underline{l}$, com um dos vértices na origem e sua altura sobre o eixo Ox, construa um sólido S, cuja seção reta do sólido $\underline{S}$, em $\underline{x}$, é um quadrado. Calcule o valor do volume do sólido $\underline{S}$.

Observação

O sólido acima é uma pirâmide de base quadrada, cuja representação geométrica é dada pela figura abaixo.