Sexta Lista de Exercícios Simplificada de SMA354 - Cálculo II
Funções vetoriais e curvas parametrizadas
Professores Wagner e Marcelo

Exercício 1 *Esboce as representações geométricas das curvas abaixo, indicando a orientação de cada uma delas (ou seja, o respectivo sentido de percurso):*

(a) $t \longmapsto (\operatorname{sen}(t)\ \cos(t))$, *para cada* $t \in [0, 2\pi]$ **(b)** $t \longmapsto \left(t, t^3\right)$, *para cada* $t \in [0, 1]$

(c) $t \longmapsto (\cos(t), \operatorname{sen}(t), -1)$, *para cada* $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ **(d)** $t \longmapsto (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$, *para cada* $t \in [0, 2\pi]$

Exercício 2 *Em cada um dos itens abaixo, encontre uma equação, nas variáveis* $\underline{x}$ *e* $\underline{y}$*, eliminando a variável* $\underline{t}$*. Além disso, esboce a representação geométrica da curva plana, dada com base na equação obtida acima. Em todos os casos considere* $t > 0$*, para ilustrar temos o exemplo:*

$$\textit{se } x = t \quad \textit{e} \quad y = t + 1, \ \textit{teremos: } y - x = 1.$$

(a) $x = t - 2$ *e* $y = 2t + 3$ **(b)** $x = t^2 + 1$ *e* $y = t^2 - 17$ **(c)** $x = 4t^2 - 5$ *e* $y = 2t + 3$

(d) $x = e^t$ *e* $y = e^{-2t}7$ **(e)** $x = t^2$ *e* $y = 2\ln(t)$ **(f)** $x = \cos(2t)$ *e* $y = \operatorname{sen}(2t)$

Exercício 3 *Encontre uma função vetorial*

$$F(t) \doteq (x(t), y(t)), \quad \textit{para cada} \quad t \in [a, b],$$

distintas satisfazendo:

(a) $y = x^2 - 5$ **(b)** $y = \sqrt{x}$ **(c)** $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ **(d)** $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 4$

<u>Sugestão:</u> **(a)** $F(t) \doteq \left(t, t^2 - 5\right)$, *para* $t \in \mathbb{R}$.

Exercício 4 *Em cada um dos itens abaixo, verifique se existe o limite* $\lim\limits_{t \to t_o} F(t)$ *e, no de existir, encontrar seu valor:*

$$\textbf{(a)}\ F(t) \doteq \left(\frac{\sqrt{t}-1}{t-1}, t^2, \frac{t-1}{t}\right), \quad \textit{para} \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{1, 0\} \quad \textit{e} \quad t_o \doteq 1$$

$$\textbf{(b)}\ F(t) \doteq \left(\frac{\operatorname{tg}(3t)}{t}, \frac{e^{2t}-1}{t}, t^3\right), \quad \textit{para} \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \textit{e} \quad t_o \doteq 0$$

$$\textbf{(c)}\ F(t) \doteq \left(\frac{t^3-8}{t^2-4}, \frac{\cos\left(\frac{\pi}{t}\right)}{t-2}, 2t\right), \quad \textit{para } t \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\} \quad \textit{e} \quad t_o \doteq 2$$

Exercício 5 *Em cada um dos itens abaixo, verifique em quais pontos a curva parametrizada* $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *é regular. Quando possível, determine a equação da reta tangente a tal curva, no ponto* $\gamma(t_o)$*, para* $t_o \in \mathbb{R}$ *especificado:*

(a) $\gamma(t) \doteq (\cos(2t), \operatorname{sen}(2t))$, *para* $t \in \mathbb{R}$ *e* $t_o \doteq 0$ *(quem é o traço dessa curva?)*

(b) $\gamma(t) \doteq (1 - \operatorname{sen}(t), 1 - \cos(t))$, *para* $t \in \mathbb{R}$ *e* $t_o \doteq \pi$ *(quem é o traço dessa curva?).*

Em cada os itens acima, encontre uma equação da reta normal às curvas dadas nos respectivos pontos $\underline{r(t_o)}$.

Exercício 6 *Em cada um dos itens abaixo* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ *é uma curva parametrizada,* $\underline{P_o}$ *um ponto do traço desta curva e* $\vec{v} \neq \vec{O}$ *um vetor tangente ao traço da curva, no ponto* $\underline{P_o}$ *e* $\underline{\pi}$ *um plano de* R^3.

Diremos que a curva parametrizada $\gamma = \gamma(t)$ *é perpendicular a um plano* $\underline{\pi}$*, no ponto* $\underline{P_o}$*, se*

$$P_o \in \pi \quad \textit{e} \quad \vec{v} \perp \pi.$$

Use esta noção para para encontrar os planos perpendiculares aos traços das curvas parametrizadas dada, onde:

$$(\mathbf{a})\ \gamma(t) \doteq \left(e^t\,,t\,e^t\,,t^2+4\right)\,,\quad \textit{para} \quad t \in \mathbb{R} \quad \textit{e} \quad P_o \doteq (1\,,0\,,4)$$

$$(\mathbf{b})\ \gamma(t) \doteq (t\ \mathrm{sen}(t)\,,t\ \cos(t)\,,t)\,,\quad \textit{para} \quad t \in \mathbb{R} \quad \textit{e} \quad P_o \doteq \left(\frac{\pi}{2}\,,0\,,\frac{\pi}{2}\right)$$

Resposta: **(a)** $x + y = 1$