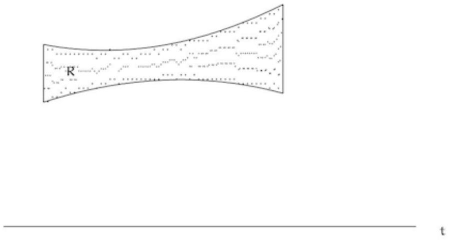
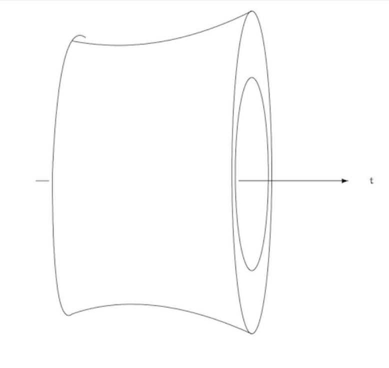
Volume de sólidos de revolução

Seja $\underline{\sigma}$ um plano em $\mathbb{R}^3$, $\underline{t}$ uma reta contida no plano $\underline{\sigma}$ e $\underline{R}$ uma região plana que está contida num dos semi-planos, do plano $\underline{\sigma}$, determinados pela reta $\underline{t}$ (veja a figura abaixo).



Definição

O sólido $\underline{S}$ *obtido da rotação da região* $\underline{R}$ *(contida no plano* $\underline{\sigma}$*) em torno da reta* $\underline{t}$ *será denominado* **sólido de revolução** *e a reta* $\underline{t}$ *será dita* **eixo de revolução** *(figura abaixo).*



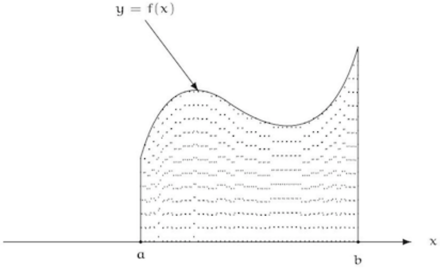
Observação

O objetivo é encontrar o volume de um sólido de revolução $\underline{S}$

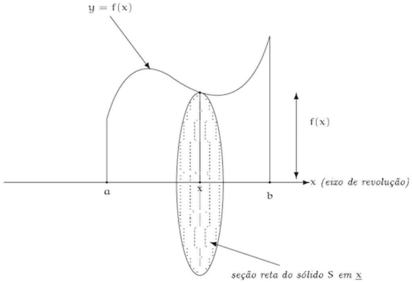
Começaremos por uma situação mais simples, a saber: seja $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e não negativa em $[a\,,b]$, ou seja,

$$f(x) \geq 0\,, \quad \text{para} \quad x \in [a\,,b]\,,$$

e denotemos por $\underline{R}$, a região limitada do plano xOy, delimitada pelas representações geométricas dos gráficos da função $\underline{f}$, das retas $x = a$, $x = b$ e do eixo Ox (figura abaixo).



Observemos que, para cada $x \in [a\,,b]$, as seções retas do sólido $\underline{S}$, em $\underline{x}$, relativamente ao eixo de revolução Ox, será um círculo, cujo centro é o ponto $(x\,,0)$ e cujo o raio será $f(x)$ (figura abaixo).



Logo, para cada $x \in [a\,,b]$, o valor da área acima, será dada por

$$\mathcal{A}(x) = \pi\, r^2 \overset{r=f(x)}{=} \pi\,[f(x)]^2\,. \tag{1}$$

Como a função $\underline{f}$ é contínua em $[a\,,b]$, segue que a função $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$, dada por (1), também será contínua em $[a\,,b]$.

Seja $\underline{\mathcal{V}}$ o valor do volume do sólido $\underline{S}$.
Logo, do Teorema do método das fatias, segue que

$$\mathcal{V} = \int_a^b \mathcal{A}(x)\,dx \overset{(1)}{=} \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx \;u.v.. \tag{2}$$

Apliquemos as ideias acima ao:

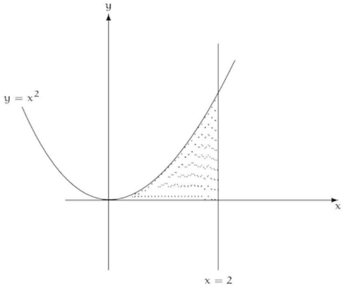
Exemplo

Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq x^2\,, \quad \textit{para} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{3}$$

Calcule valor do volume $\underline{\mathcal{V}}$, do sólido de revolução $\underline{S}$, obtido da rotação da região limitada $\underline{R}$, contida no plano xOy, delimitada pelas representações geométricas dos gráficos da função $\underline{f}$, da reta $x = 2$ e do eixo Ox, em torno do eixo Ox.

Resolução: a representação geométrica da região $\underline{R}$, que será rotacionada em torno do eixo Ox, é dada pela figura abaixo.

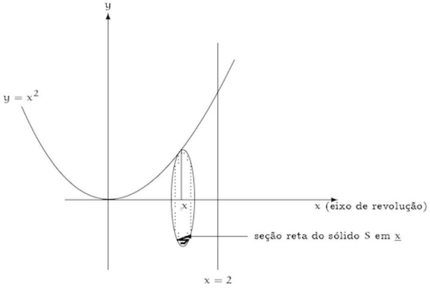


P ara cada $x \in [0\,, 2]$, o valor da área, isto é, $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$, da seção reta do sólido $\underline{S}$, em $\underline{x}$, será o valor da área de um círculo de raio

$$r = f(x) \stackrel{(3)}{=} x^2\,.$$

A função $\underline{f}$ é não negativa, assim, para cada $x \in [0\,,2]$, teremos que

$$\mathcal{A}(x) = \pi\, r^2 \overset{r=f(x)}{=} \pi\,[f(x)]^2 \overset{(3)}{=} \pi\,\left[x^2\right]^2 = \pi\, x^4\,. \qquad (4)$$



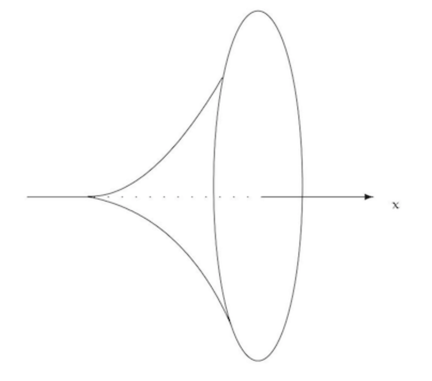
Observemos que a função $\mathcal{A} : [0\,,2] \to \mathbb{R}$, dada por (4), é uma função contínua em $[0\,,2]$.

Logo, pelo Teorema do método da fatias, segue que

$$\mathcal{V} = \int_a^b \mathcal{A}(x)\, dx \overset{(4)}{=} \int_0^2 \pi\, x^4\, dx = \pi\, \left[\frac{1}{5}\, x^5\right] \Big|_{x=0}^{x=2} = \frac{32}{5}\,\pi\;\; u.v.\,,$$

Observação

Um esboço da representação geométrica do sólido é dado pela figura abaixo.

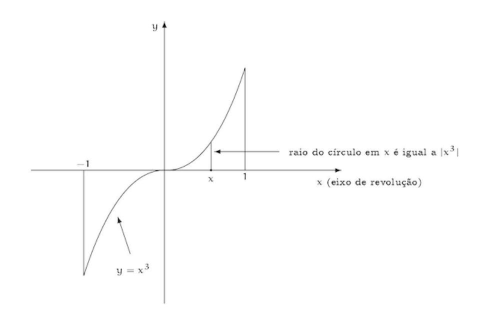


Exercício

Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *dada por*

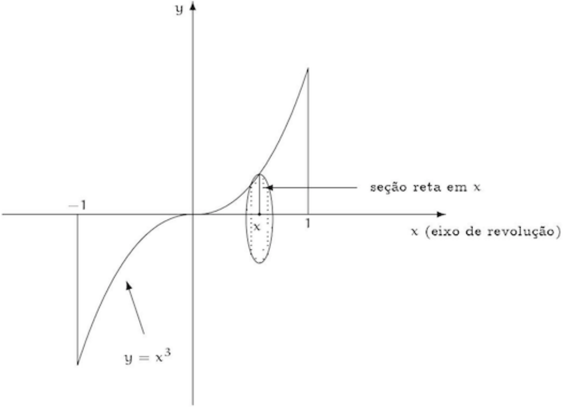
$$f(x) \doteq x^3 \,, \quad para \quad x \in \mathbb{R} \,.$$

Encontre o valor do volume, que indicaremos por $\underline{\mathcal{V}}$, *do sólido de revolução* $\underline{S}$, *obtido da rotação da região limitada* R, *contida no plano* xOy, *delimitada pela representações geométricas dos gráfico da função* $\underline{f}$, *das retas* $x = 1$, $x = -1$, *em torno do eixo* Ox *(figura abaixo).*



Resolução: observemos que, para cada $x \in [-1\,,1]$, a seção reta do sólido $\underline{S}$, em $\underline{x}$, (figura abaixo) é um círculo de centro sobre o eixo Ox, cujo raio é

$$r = |f(x)| = \left|x^3\right| .$$



Para cada $x \in [-1, 1]$, o valor da área, que indicaremos por $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$, da seção reta do sólido em $\underline{x}$ será dada por:

$$\mathcal{A}(x) = \pi\, r^2 \overset{r=|x^3|}{=} \pi\, \left(\left|x^3\right|\right)^2 . \tag{5}$$

Observemos que a função $\mathcal{A} : [-1\,, 1] \to \mathbb{R}$, dada por (5), é uma função contínua em $[-1\,, 1]$, logo, do Teorema do método das fatias, segue que

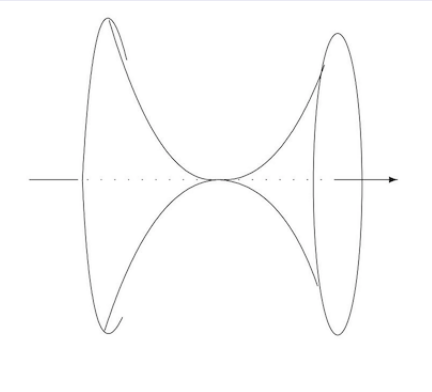
$$\mathcal{V} = \int_a^b \mathcal{A}(x)\, dx \overset{(5)}{=} \int_{-1}^{1} \pi\, \left(\left|x^3\right|\right)^2 dx = \pi \int_{-1}^{1} x^6\, dx$$

$$= \pi\, \left[\frac{1}{7}\, x^7\right] \Big|_{x=-1}^{x=1} \overset{\text{exercício}}{=} \frac{2}{7}\, \pi\ u.v.\,,$$

$\square$

Observação

A representação geométrica do sólido $\underline{S}$ *acima é dada pela figura abaixo.*



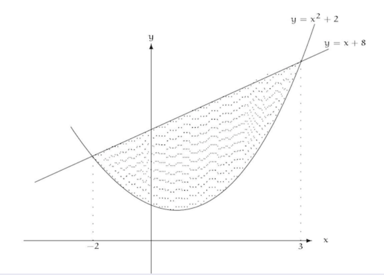
Nas notas temos também os:

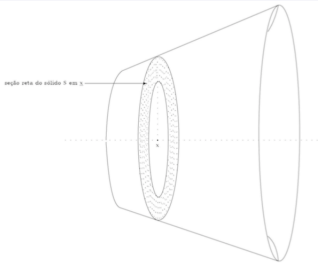
Exercício

Sejam $f\,, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *as funções dada por*

$$f(x) \doteq x^2 + 2 \quad e \quad g(x) \doteq x + 8\,, \quad para \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Encontre o valor do volume, que indicaremos por $\underline{\mathcal{V}}$*, do sólido de revolução* $\underline{S}$*, obtido da rotação da região limitada* $\underline{R}$*, contida no plano* xOy*, delimitada pelas representações geométricas gráficos das funções* $\underline{f}$ *e* $\underline{g}$*, quando rotacionada em torno do eixo* Ox *(as figuras abaixo nos fornecem a região* R *e do sólido* S*).*



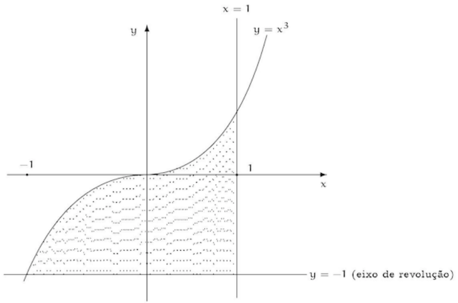


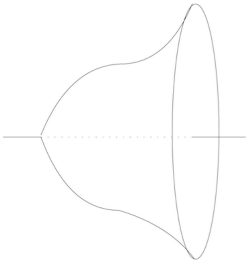
Exemplo

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$f(x) \doteq x^3\,, \quad para \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Encontre o valor do volume, que indicaremos por $\underline{\mathcal{V}}$*, do sólido de revolução* $\underline{S}$*, obtido da rotação da região limitada* $\underline{R}$*, contida no plano* xOy*, delimitada pela representação geométrica dos gráficos da função* $\underline{f}$ *, das retas* $x = 1$*,* $y = -1$*, em torno da reta* $y = -1$ *(as figuras abaixo nos fornecem a região* R *e o sólido* S*).*



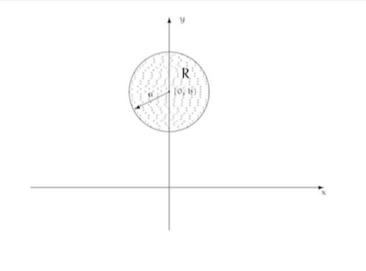


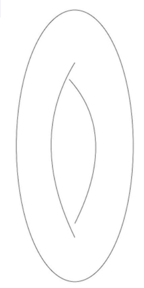
Exercício

Sejam $0 < a < b$ *fixados. Encontre o valor do volume, que indicaremos por* $\underline{\mathcal{V}}$, *do sólido de revolução* $\underline{S}$, *obtido da rotação da região limitada* $\underline{R}$, *contida no plano* xOy, *em torno do eixo* Ox, *onde*

$$R \doteq \left\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2 + (y-b)^2 \leq a^2\right\}\,.$$

A superfície deste sólido é denominada de **<u>toro</u>** *(as figuras abaixo nos fornecem a região* R *e do sólido* S*).*



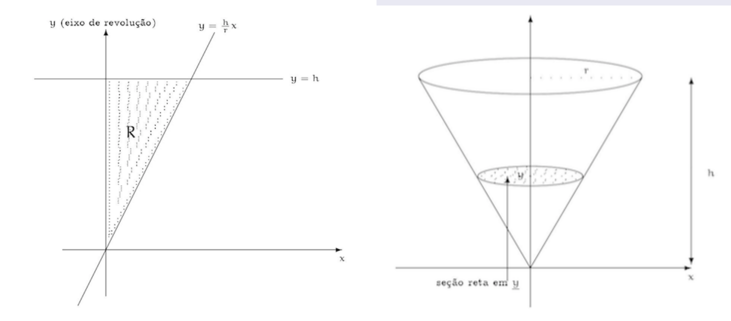


Exercício

Sejam $r\,,h > 0$ fixados. Calcular o valor volume, que indicaremos por V, do sólido de revolução S obtido da rotação da região limitada R, contida no plano xOy, delimitada pelas retas

$$y = \frac{h}{r}\,x \quad \text{e} \quad y = h \qquad \text{e pelo eixo } Oy\text{, em torno do eixo } Oy$$

(as figuras abaixo nos fornecem a região R e do sólido S).

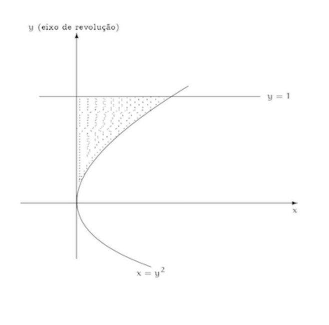


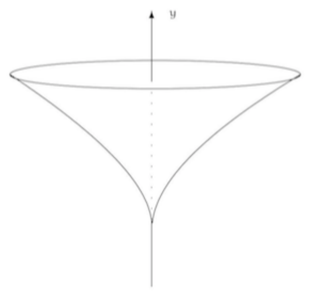
Exercício

Encontre o valor do volume, que indicaremos por $\underline{\mathcal{V}}$, do sólido de revolução $\underline{S}$ obtido da rotação, em torno do eixo Oy, da região limitada $\underline{R}$, contida no plano xOy, delimitada pelas representações geométricas da curva

$$y^2 = x \quad \text{e pela reta } y = 1 \text{ e pelo eixo } Oy.$$

(as figuras abaixo nos fornecem a região R e do sólido S).



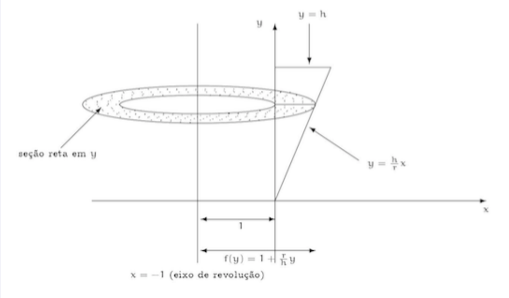


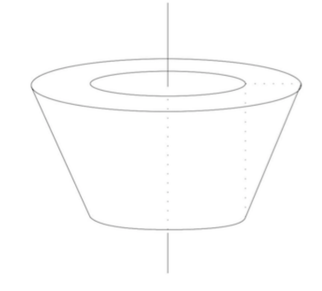
Exercício

Encontre o valor do volume, que indicaremos por $\underline{\mathcal{V}}$, *do sólido de revolução* $\underline{S}$, *obtido da rotação, em torno da reta* $x = -1$, *da região limitada, contida no plano* xOy, *delimitada pelas retas*

$$y = \frac{h}{r}\,x\,, \quad y = h \quad \text{e pelo eixo } Oy\,.$$

(as figuras abaixo nos fornecem a região R *e do sólido* S*).*



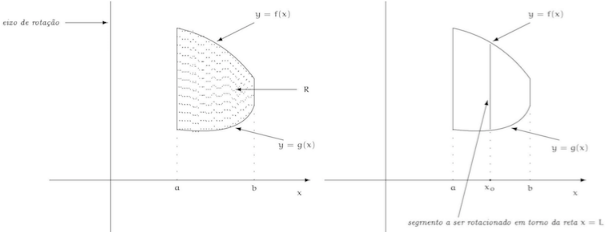


Método dos cilindros para sólidos de revolução

Sejam $L \leq a$ e $f\,,g : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ funções tais que

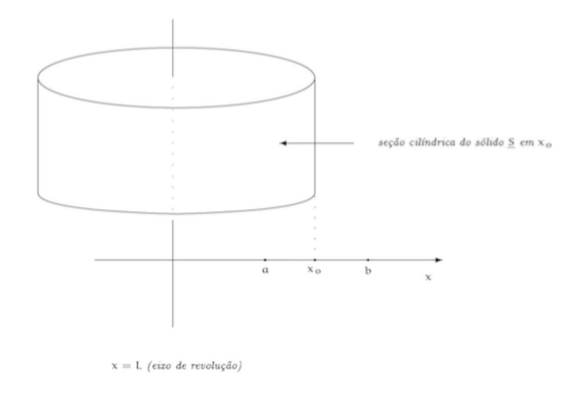
$$g(x) \leq f(x)\,, \quad \text{para} \quad x \in [a\,,b]\,.$$

Consideremos o sólido de revolução $\underline{S}$ obtido da rotação da região limitada $\underline{R}$, contida no plano xOy, delimitada pelas representações geométricas dos gráficos das funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$, pelas retas $x = a$, $x = b$, em torno da reta $x = L$, isto é, a reta $x = L$ será o eixo de revolução do sólido $\underline{S}$. Para cada $x_o \in [a\,,b]$, $\mathcal{A}(x_o)$ denotará o valor da área do cilindro obtido da rotação do segmento, que é a intersecção da reta $x = x_o$ com a região $\underline{R}$, em torno da reta $x = L$ (veja a figura abaixo).



Definição

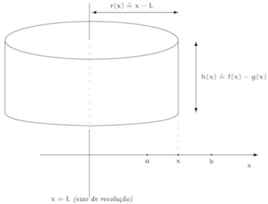
O cilindro acima obtido será denominado **seção cilíndrica (ou cilindro) do sólido** S **em** x_o *(figura abaixo).*



Na situação acima, temos que, para cada $x \in [\,a, b]$, o valor da área, isto é, $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$, da seção cilíndrica do sólido $\underline{S}$, em $\underline{x}$, será dada por:

$$\mathcal{A}(x) = 2\,\pi\, r(x)\, h(x)\,, \quad \text{onde} \quad r = r(x) \qquad \text{e} \qquad h = h(x)$$

são, respectivamente, os valores do raio e a altura da seção cilíndrica do sólido $\underline{S}$, em $\underline{x}$ (figura abaixo).



Com isto, para cada $x \in [a\,, b]$, teremos que

$$r(x) = x - L\,, \;\; h(x) = f(x) - g(x)$$

$$\text{e assim: } \mathcal{A}(x) = 2\,\pi\,(x - L)\,[f(x) - g(x)]\,. \tag{6}$$

Teorema

Sejam $a\,,\,b\,,\,L$ *tais que*

$$L \leq a < b\,.$$

Suponhamos que as funções $f\,,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *são contínuas em* $[a\,,\,b]$ *e satisfazem*

$$g(x) \leq f(x)\,, \quad para \quad x \in [a\,,\,b]\,.$$

Então o valor do volume, que indicaremos por $\underline{\mathcal{V}}$*, do sólido de revolução* $\underline{S}$*, definido anteriormente, será dado por*

$$\mathcal{V} = \int_a^b \mathcal{A}(x)\,dx\,, \tag{7}$$

ou seja,

$$\mathcal{V} = 2\,\pi \int_a^b (x - L)\,[f(x) - g(x)]\,dx \;\; u.v.\,, \tag{8}$$

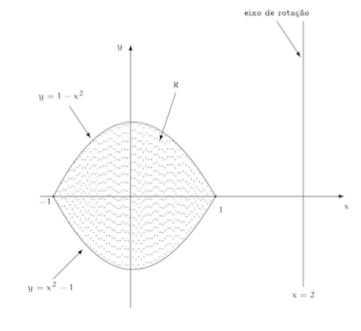
onde $u.v.$ *denotará a unidade de volume.*

Exemplo

Sejam $f\,, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funções dadas por*

$$f(x) \doteq 1 - x^2, \quad g(x) \doteq x^2 - 1\,, \quad para \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Encontre o valor do volume, que indicaremos por $\underline{\mathcal{V}}$*, do sólido de revolução* $\underline{S}$*, obtido da rotação da região limitada* $\underline{R}$*, contida no plano* xOy*, delimitada pelas representações geométricas dos gráficos das funções* $\underline{f}$ *e* $\underline{g}$*, em torno da reta* $x = 2$ *(figura abaixo).*



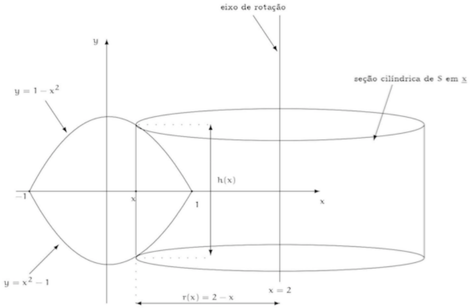
Resolução: as funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$ são contínuas em $[a\,,b]$. Logo podemos aplicar o Teorema do método das cascas cilíndricas para calcular o valor volume $\underline{\mathcal{V}}$ do sólido de revolução $\underline{S}$.
Observemos que

$$f(x) = g(x)\,, \text{ se, e somente se, } 1 - x^2 = x^2 - 1\,,$$
$$\text{ou seja,} \qquad x = 1 \quad \text{e} \quad x = -1\,.$$

Notemos que, para cada $x \in [-1\,,1]$, temos que o valor da área, que indicaremos por $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$, da seção cilíndrica do sólido de revolução $\underline{S}$, em $\underline{x}$ (é a rotação de um segmento em torno da reta $x = 2$ - veja a figura abaixo), será dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= 2\,\pi\, r(x)\, h(x) \\ &= 2\,\pi\,(2-x)\,\left[\left(1-x^2\right)-\left(x^2-1\right)\right]\,, \quad \text{para} \quad x \in [-1\,,1]\,, \end{aligned} \tag{9}$$

que é uma função contínua em $[-1\,,1]$.



Logo, pelo Teorema do método das cascas cilíndricas, segue que

$$\mathcal{V} \overset{(7)}{=} \int_a^b \mathcal{A}(x)\, dx = \int_{-1}^{1} 2\,\pi\, r(x)\, h(x)\, dx$$

$$\overset{(9)}{=} 2\,\pi \int_{-1}^{1} (2-x)\left[\left(1-x^2\right) - \left(x^2-1\right)\right]\, dx \overset{\text{exercício}}{=} \frac{32}{3}\,\pi \; u.v.\,,$$

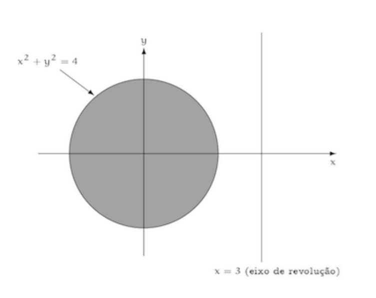
Nas notas temos também os:

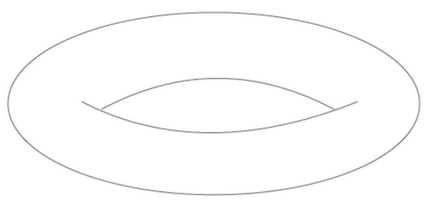
Exercício

Encontre o valor do volume, que indicaremos por $\underline{\mathcal{V}}$*, do sólido de revolução* $\underline{S}$*, obtido da rotação da região limitada* $\underline{R}$*, contida no plano* xOy*, em torno da reta* $x = 3$*, onde* R *é o círculo de centro no ponto* $(0\,,0)$ *e cujo raio tem valor igual a* 2*, isto é,*

$$R \doteq \left\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ \,,x^2 + y^2 \leq 4\right\}\,.$$

(as figuras abaixo nos fornecem a região R *e do sólido* S*).*





Exercício

Encontre o valor do volume, que indicaremos por $\underline{\mathcal{V}}$*, do sólido de revolução* $\underline{S}$*, obtido da rotação da região limitada* $\underline{R}$*, contida no plano* xOy*, delimitada pelas representações geométricas das retas*

$$x = y - 3\,, \quad x = -y + 3\,, \quad y = 1\,, \quad \text{em torno da reta } y = 1.$$

(as figuras abaixo nos fornecem a região R *e do sólido* S*).*