Sétima Lista de Exercícios Simplificada de SMA354 - Cálculo II
Funções a valores reais, de várias variáveis reais: domínio, imagem, curva ou superfície de nível, limite e continuidade
Professores Wagner e Marcelo

Exercício 1 *Encontre o domínio e o conjunto imagem da função* $\underline{f}$*:*

(**a**) $f(x,y) \doteq 2x - y^2$ (**b**) $f(x,y) \doteq \sqrt{4 - x^2 + y^2}$ (**c**) $f(x,y) \doteq \dfrac{\sqrt{x+y} - 1}{x+y-1}$

Exercício 2 *Em cada um dos intens abaixo, encontre a representação geométrica das curvas de nível, de nível* $\underline{c}$*, da função* $\underline{f}$*, que indicaremos por* $\underline{f_c}$*, para*

$c \in \{-1, 0, 4\}$: (**a**) $f(x,y) = xy$ (**b**) $f(x,y) \doteq 4 - (x-1)^2 - (y+3)^2$

Exercício 3 *Em cada um dos itens abaixo, encontre a representação geométrica das superfícies de nível, de nível* $\underline{c}$*, da função* $\underline{f}$*, que indicaremos por* $\underline{f_c}$*, para*

$c \in \{-1, 0, 4\}$: (**a**) $f(x,y,z) \doteq 2x - 3y + z$ (**b**) $f(x,y,z) \doteq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Exercício 4 *Em cada um dos itens abaixo, encontre uma equação do curva ou superfície nível (curva ou superfície) da função* $\underline{f}$*, que contenha pelo ponto* $\underline{P_o}$ *dado.*

(**a**) $f(x,y) \doteq y\,\arctan(x)$, *e* $P_o \doteq (1,4)$ (**b**) $f(x,y,z) \doteq z^2 y + x$, *e* $P_o \doteq (1,4,-2)$

Exercício 5 *Seja* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$*, dada por*

$$f(x,y,z) \doteq x^2 - y^2 + z^2, \quad \textit{para cada} \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Encontre a equação e de a represetação geométrica do conjuntos formado pelos pontos que satisfazem:

(**a**) $w = f(1,y,z)$ (**b**) $w = f(x,1,z)$ (**c**) $w = f(x,1,1)$

Exercício 6 *Em cada um dos itens abaixo, utilizando a definição de limties, mostre que:*

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} (2x - 3y + 4) = -3.$$

Exercício 7 *Utilizando as propriedades de limites calcular:*

(**a**) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2+y^2}{x-y}$ (**b**) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2}{3+xy}$ (**c**) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \sqrt{x^2+y^2-1}$

(**d**) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,1,0)} \frac{x^2+y^2}{x-y-z}$ (**e**) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(-1,1,2)} (xz - xy - 2xzy)$ (**f**) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(1,-1,4)} \left|\frac{x-y}{x+xy+y^2z}\right|$

Exercício 8 *Em cada um dos itens abaixo, verifique se a afirmação é verdadeiros ou falsas, justificando sua resposta.*

(**a**) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y} = 0$ (**b**) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^2}{x^2+y} = 0$ (**c**) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sqrt{x+y}-1}{x+y-1} = 2$

Exercício 9 *Em cada um dos itens abaixo, verifique se o limite existe ou não, justificando sua resposta.*

(**a**) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (**b**) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|xy|}$

(**c**) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x+5y}{x-y^2+z}$ (**d**) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{y-1}{\sqrt{x^2-2x+y^2-2y+2}}$

(**e**) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{x^2-4x+4}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (**f**) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{y-2}{\sqrt{x^2+(y-2)^4}}$

Exercício 10 *Veja se é possível utilizar o Teorema do confronto (ou do sanduíche), para o cálculo dos limites abaixo.*

(**a**) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ (**b**) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(**c**) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ (**d**) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2+z^2}$

(**e**) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$ (**f**) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{4x-y-3z}{2x-5y+2z}$

(**g**) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left[\operatorname{sen}(x)\ \operatorname{sen}\left(\frac{xy}{x^2+y^2+z^2}\right)\right]$ (**h**) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(1,1,2)} \frac{x^2}{x+y}$

Exercício 11 *Em cada um dos itens abaixo encontre o maior subconjunto do domínio da função* $\underline{f}$*, onde ela será contínua.*

(**a**) $f(x,y) \doteq \ln(x+y-1)$ (**b**) $f(x,y) \doteq \sqrt{x}\, e^{xy}$ (**c**) $f(x,y) \doteq \operatorname{sen}\sqrt{1-x^2+y^2}$

(**d**) $f(x,y,z) \doteq \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$ (**e**) $f(x,y,z) \doteq \dfrac{1}{x+y+z}$ (**f**) $f(x,y,z) \doteq \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}}$

Exercício 12 *Em cada um dos itens abaixo, verifique se a função é contínua em todo* $\mathbb{R}^2$.

(**a**) $f(x,y) \doteq \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & se \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & se \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$ (**b**) $f(x,y) \doteq \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & se \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & se \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

(**c**) $f(x,y) \doteq \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^4+y^4}, & se \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & se \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$ (**d**) $f(x,y) \doteq \begin{cases} \dfrac{x^2y\ \operatorname{sen}(xy)}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}, & se \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & se \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$