Integrais impróprias de 1.a espécie

Definição

Seja $f : [a\,,\infty) \to \mathbb{R}$ *uma função integrável em* $[a\,,b]$, *para cada* $b \in [a\,,\infty)$. *Definiremos a* **integral imprópria, de 1.a espécie, da** $\underline{f}$ **em** $[a\,,\infty)$, *denotada por* $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$, *como sendo*

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx \doteq \lim_{b\to\infty} \int_a^{b} f(x)\,dx\,. \qquad (1)$$

Diremos que a integral imprópria de 1.a espécie $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ *é* **convergente** *se o limite (1) acima existir e for finito (um número real).*

Caso contrário, diremos que integral imprópria de 1.a espécie acima é **divergente**.

De modo análogo temos a:

Definição

Seja $g : (-\infty\,, b] \to \mathbb{R}$ *uma função integrável em* $[a\,, b]$, *para cada* $a \in (-\infty\,, b]$. *Definiremos a* **integral imprópria, de 1.a espécie, da função g, em $(-\infty\,, b]$**, *denotada por* $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} g(x)\,dx$, *como sendo*

$$\int_{-\infty}^{b} g(x)\,dx \doteq \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} g(x)\,dx\,. \tag{2}$$

Diremos que a integral imprópria de 1.a espécie $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} g(x)\,dx$ *é* **convergente** *se o limite (2) acima existir e for finito (um número real).*

Caso contrário, diremos que integral imprópria de 1.a espécie é **divergente**.

Exemplo

Estudar a convergência da integral imprópria de 1.a espécie $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx$. *Caso ela seja convergente, encontrar o seu valor.*

Resolução: neste caso a função $f : [0\,,\infty) \to \mathbb{R}$ será dada por

$$f(x) \doteq e^{-x}\,, \quad \text{para} \quad x \in [0\,,\infty)\,. \tag{3}$$

Como a função $\underline{f}$ é contínua em $[0\,,\infty)$, segue que ela será integrável em $[0\,,b]$, para cada $b \in [0\,,\infty)$ fixado e:

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx \overset{(1)}{=} \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{-x}\,dx$$

$$\overset{\text{Teor. fund. Cálc. em } [0\,,b]}{=} \lim_{b\to\infty} \left[-e^{-x} \Big|_{x=0}^{x=b} \right] = \lim_{b\to\infty} \left[-e^{-b} - (-1) \right]$$

$$\lim_{b\to\infty} e^{-b} = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{e^{b}} \overset{\text{exercício}}{=} 0$$

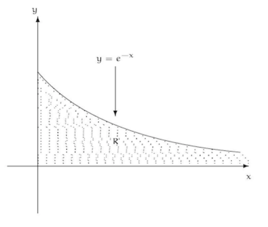
$$= 1\,. \tag{4}$$

Logo, de (4) e da Definição acima, segue que a integral imprópria de 1.a espécie $\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx$ será convergente e seu valor é igual a 1.
$\square$

Observação

A função $\underline{f}$ do Exemplo acima, é não negativa.
Logo a integral imprópria de 1.a espécie acima nos fornecerá a área, denotada $\underline{\mathcal{A}}$, da região $\underline{R}$, contida no plano xOy, delimitada pela representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$, pela reta $x = 0$ e o eixo Ox (figura abaixo), ou seja,

$$\mathcal{A} = \int_0^{\infty} e^{-x}\,dx \overset{(4)}{=} 1\ u.a.\,.$$



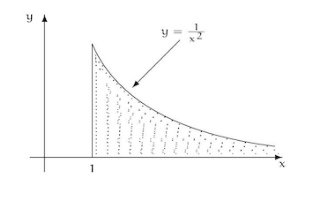
Nas notas resolvemos também os:

Exemplo

Estudar a convergência da integral imprópria de 1.a espécie $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx$. *Caso ela seja convergente, encontrar o seu valor.*

Observação

A função $\underline{f}$ *do Exemplo acima, é não negativa.*
Logo, a integral imprópria de 1.a espécie acima nos fornecerá a área, cujo valor denotaremos por $\underline{A}$, *da região* $\underline{R}$, *contida no plano* xOy, *delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$, *pela reta* $x = 1$ *e o eixo* Ox *(figura abaixo).*

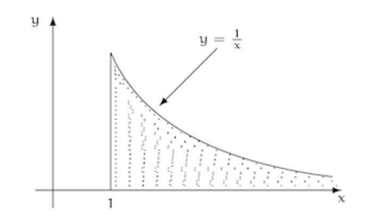


Exemplo

Estudar a convergência da integral imprópria de 1.a espécie $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx$. *Caso ela seja convergente, encontrar o seu valor.*

Observação

A função $\underline{f}$ *do Exemplo acima, é não negativa.*
Logo, segue que a integral imprópria de 1.a espécie acima nos fornecerá a área, denotada por $\underline{A}$, *da região* $\underline{R}$, *contida no plano* xOy, *delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$, *pela reta* $x = 1$ *e o eixo* Ox *(veja a figura abaixo)*



Os dois últimos Exemplos acima, podem ser obtidos como consequência do seguinte resultado gera, cuja demonstração pode ser encontrada nas notas de aula:

Proposição

Seja $p \in \mathbb{R}$. A integral imprópria de 1.a espécie

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\, dx \text{ é convergente}$$

se, e somente se, $p > 1$.

Além disso, se $p > 1$, teremos

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\, dx = \frac{1}{p-1}\,.$$

Exercício

Sejam $s > 0$ e $a \in \mathbb{R}$ fixados. Estudar a convergência da integral imprópria de 1.a espécie $\displaystyle\int_a^{\infty} e^{-s\,t}\,dt$. Caso ela seja convergente, encontrar o seu valor.

Resolução: consideremos a função $f_s : [a\,,\infty) \to \mathbb{R}$ será dada por

$$f_s(t) \doteq e^{-s\,t}\,, \quad \text{para} \quad t \in [a\,,\infty)\,.$$

Como a função f_s é contínua em $[a\,,\infty)$, segue que ela será integrável em $[a\,,b]$, para cada $b \in [a\,,\infty)$ fixado e:

$$\int_a^{\infty} e^{-s\,t}\,dt \overset{(1)}{=} \lim_{b\to\infty} \int_a^{b} e^{-s\,t}\,dt$$

$$\overset{\text{Teor. fund. Cálc. em } [a\,,b]}{=} \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{-s}\, e^{-s\,t} \Big|_{t=a}^{t=b} \right]$$

$$= \frac{1}{(-s)} \lim_{b\to\infty} \left[e^{-s\,b} - e^{-s\,a} \right] \overset{\text{exercício}}{=} \frac{e^{-a\,s}}{s}\,. \tag{5}$$

Logo, de (5) e da Definição acima, a integral imprópria de 1.a espécie $\displaystyle\int_a^{\infty} e^{-s\,t}\,dx$ será convergente e seu valor será $\dfrac{e^{-a\,s}}{s}$, para cada $s > 0$ fixado, ou seja,

$$\int_a^{\infty} e^{-s\,t}\,dt = \frac{e^{-a\,s}}{s}\,, \tag{6}$$

para cada $s > 0$ fixado.

$\square$

Definição

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função integrável em* $[a, b]$, *para cada* $a, b \in \mathbb{R}$, *com* $a \leq b$. *Definiremos a* **integral imprópria da função** $\underline{f}$**, de 1.a espécie, em** $(-\infty, \infty)$, *denotada por* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, *como sendo*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \doteq \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx\,, \qquad (7)$$

onde $c \in \mathbb{R}$ *está fixo. Diremos que a integral imprópria de 1.a espécie* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ *é* **convergente**, *se as integrais impróprias*

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx \quad e \quad \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$$

forem convergentes. Caso contrário, diremos que integral imprópria de 1.a espécie (7) *é* **divergente**.

Exemplo

Estudar a convergência da integral imprópria de 1.a espécie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$. *Caso ela seja convergente, encontrar o seu valor.*

Resolução: consideremos a função $f : (-\infty\,,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq \frac{1}{1+x^2}\,, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{8}$$

Como a função $\underline{f}$ é contínua em $(-\infty, \infty)$, segue que ela será integrável em $[a\,, b]$, para cada $a\,, b \in \mathbb{R}$ fixados, com $a \leq b$ e:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{c} \frac{1}{1+x^2}\, dx + \int_{c}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx\,. \tag{9}$$

Mas

$$\int_c^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_c^b \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$\overset{\text{Teor. fund. Cálc. em } [c\,,\,b]}{=} \lim_{b\to\infty} \left[\operatorname{arctg}(x) \Big|_{x=c}^{x=b} \right]$$

$$= \lim_{b\to\infty} [\operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(c)] \overset{\text{exercício}}{=} \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(c)\,, \qquad (10)$$

$$\int_{-\infty}^{c} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^c \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$\overset{\text{Teor. fund. Cálc.em } [a\,,\,c]}{=} \lim_{a\to-\infty} \left[\operatorname{arctg}(x) \Big|_{x=a}^{x=c} \right]$$

$$= \lim_{a\to-\infty} [\operatorname{arctg}(c) - \operatorname{arctg}(a)] \overset{\text{exercício}}{=} \operatorname{arctg}(c) - \left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \operatorname{arctg}(c) + \frac{\pi}{2}\,. \qquad (11)$$

Logo, de (10) e (11), temos que as integrais impróprias de 1.a espécie

$$\int_c^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^c \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

serão convergentes e assim, da Definição acima, segue que a a integral imprópria de 1.a espécie $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ será convergente e

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^c \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_c^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$\overset{(10)\text{ e }(11)}{=} \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(c)\right] + \left[\operatorname{arctg}(c) + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi\,,$$

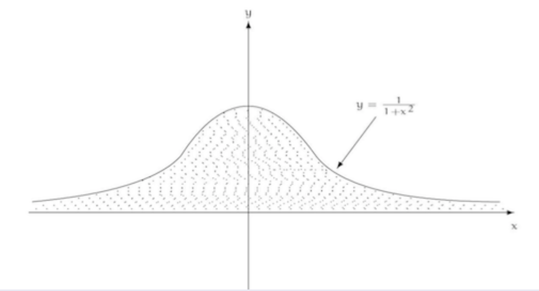
isto é, $$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi\,. \qquad (12)$$

$\square$

Observação

Do Exemplo acima, temos que a área, que indicaremos por $\underline{\mathcal{A}}$, *da região* $\underline{R}$, *delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$, *dada por* (8), *e pelo eixo* Ox, *será dada pela integral imprópria de de 1.a espécie acima, pois a função* $\underline{f}$, *é não negativa em* $\mathbb{R}$, *(veja a figura abaixo) e:*

$$\mathcal{A} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx \overset{(12)}{=} \pi \; u.a\,.$$



Propriedades das integrais impróprias de 1.a espécie:

Proposição

Sejam $f\,,g:[a\,,\infty)\to\mathbb{R}$ *integráveis em* $[a\,,b]$, *para* $b\in[a\,,\infty)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ *e* $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ *são convergentes. Então:*

1. *a integral imprópria* $\displaystyle\int_c^{\infty} f(x)\,dx$ *será convergente e:*

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^{c} f(x)\,dx}_{\text{integral definida}} + \underbrace{\int_c^{\infty} f(x)\,dx}_{\text{integral imprópria de 1.a espécie}} \quad .$$

2. *a integral imprópria* $\displaystyle\int_a^{\infty} (\lambda\,f)(x)\,dx$ *será convergente e*

$$\int_a^{\infty} (\lambda\,f)(x)\,dx = \lambda\int_a^{\infty} f(x)\,dx\,.$$

Proposição

3. *as as integrais impróprias* $\int_a^{\infty} (f+g)(x)\,dx$, $\int_a^{\infty} (f-g)(x)\,dx$, *serão convergentes e:*

$$\int_a^{\infty} (f+g)(x)\,dx = \int_a^{\infty} f(x)\,dx + \int_a^{\infty} g(x)\,dx$$

$$\int_a^{\infty} (f-g)(x)\,dx = \int_a^{\infty} f(x)\,dx - \int_a^{\infty} g(x)\,dx\,.$$

4. *Se* $\lambda \neq 0$, *a integral imprópria* $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ *é convergente e a integral imprópria* $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ *for divergente, então as integrais impróprias* $\int_a^{\infty} (f+g)(x)\,dx$,, $\int_a^{\infty} (f-g)(x)\,dx$ *e* $\int_a^{\infty} (\lambda\, g)(x)\,dx$ *serão divergentes.*

Teorema

(da comparação para integrais impróprias) *Sejam* $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *funções integráveis em* $[a, b]$, *para* $b \in [a, \infty)$, *satisfazendo*

$$0 \leq f(x) \leq g(x)\,, \quad para \quad x \in [a, \infty)\,.$$

Então:

1. *Se a integral imprópria* $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ *for convergente, então a integral imprópria* $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ *será convergente e*
$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx \leq \int_a^{\infty} g(x)\,dx\,.$$
2. *Se a integral imprópria* $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ *for divergente, então a integral imprópria* $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ *será divergente.*

Observação

Vale um resultado análogo aos resultados acima, para integrais impróprias em $(-\infty\,, b]$ e em $(-\infty\,, \infty)$,

Exemplo

Estudar a convergência da integral imprópria $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$.

Resolução: a função $f : [1\,, \infty) \to \mathbb{R}$ é dada por

$$f(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,, \quad \text{para} \quad x \in [1\,, \infty)\,, \tag{13}$$

é uma função $\underline{f}$ será integrável em $[1\,, b]$, para cada $b \in [1\,, \infty)$ fixado, pois é uma contínua em $[1\,, \infty)$.

Se a função $g : [1\,,\infty) \to \mathbb{R}$ é dada por

$$g(x) \doteq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,, \quad \text{para} \quad x \in [1\,,\infty)\,, \tag{14}$$

então, por Proposição anterior (com $p \doteq \dfrac{3}{2} > 1$), temos que a integral imprópria $\displaystyle\int_1^{\infty} g(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$ será convergente.
Para cada $x \in [1\,,\infty)$, temos que

$$0 \leq f(x) \overset{(13)}{=} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} \overset{1+x^3 \geq x^3}{\leq} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \overset{(14)}{=} g(x)\,. \tag{15}$$

Logo, de (15), da desigualdade acima e do item 1. do Teorema da comparação para integrais impróprias, segue que a integral imprópria $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$ será convergente.

$\square$

Observação

No Exemplo acima, mostramos que a integral imprópria de 1.a espécie é convergente mas **não** *conhecemos o valor da mesma.*

Exercício

Estudar a convergência da integral imprópria de 1.a espécie $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$.

Resolução: consideremos as funções $f\,,g : [1\,,\infty) \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$g(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,, \quad f(x) \doteq 1+x\,, \quad \text{para} \quad x \in [1\,,\infty)\,.$$

Observemos que $(x+1)^2 = x^2 + 2\,x + 1 \geq 1 + x^2 \geq 0\,,$

implicando em: $1 + x \geq \sqrt{1+x^2} > 0\,, \quad \text{para} \quad x \in [1\,,\infty)\,. \quad (16)$

Logo $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \overset{(16)}{\geq} \dfrac{1}{1+x} = f(x)\,, \quad \text{para} \quad x \in [1\,,\infty)\,.$

Notemos que

$$\int_1^{\infty} f(x)\, dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{1+x}\, dx \overset{\text{exercício}}{=} \infty\,,$$

isto é, a integral imprópria de 1.a espécie $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x}$ é divergente.
Logo, das considerações acima e do item 2. do Teorema da comparação para integrais impróprias, segue que a integral imprópria de $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$ também será divergente.

□

Nas notas também tratamos dos:

Exercício

Estudar a convergência da integral imprópria de 1.a espécie
$\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-x^2}\, dx\,.$

Teorema

Seja $f : [a\,,\infty) \to \mathbb{R}$ *uma função integrável em* $[a\,,b]$, *para cada* $b \in [a\,,\infty)$, *não negativa em* $[a\,,\infty)$ *e suponhamos que*

$$\text{existe } p \in \mathbb{R} \text{ tal que } \quad \lim_{x\to\infty} x^p\, f(x) = A\,,$$

$$\text{onde } A \in [0\,,\infty]\,.$$

1. *se*

   $$p \in (1\,,\infty) \quad e \quad A \in [0\,,\infty)\,,$$

   temos que a integral imprópria de 1.a espécie $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ *será convergente.*

2. *se*

   $$p \in (-\infty\,,1] \quad e \quad A \in (0\,,\infty]\,,$$

   temos que a integral imprópria 1.a espécie $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ *será divergente.*

Exemplo

A integral imprópria $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x^2+2\,x+1}{4\,x^4+25\,x^3+2\,x+5}\,dx$ *é convergente?*

Resolução: a função $f : [1\,,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq \frac{x^2+2x+1}{4\,x^4+25\,x^3+2\,x+5}\,, \quad \text{para} \quad x \in [1\,,\infty)\,,$$

é integrável em $[1\,,b]$, para cada $b \in [1\,,\infty)$ fixado (pois função $\underline{f}$ é uma função contínua em $[1\,,\infty)$), não negativa em $[1\,,\infty)$ e,

$$\lim_{x\to\infty} x^2\,f(x) = \lim_{x\to\infty}\left[x^2\,\frac{x^2+2\,x+1}{4\,x^4+25\,x^3+2\,x+5}\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2\,x^3+x^2}{4\,x^4+25\,x^3+2\,x+5} \overset{\text{exercício}}{=} \frac{1}{4} \doteq A\,.$$

$$\text{Como:} \quad p \doteq 2 > 1 \quad \text{e} \quad A = \frac{1}{4} \in [0\,,\infty)$$

do item 2. do Teorema acima, segue que a integral imprópria de será convergente.

Exercício

Estudar a convergência da integral imprópria $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2}\,dx$.

Exercício

Estudar a convergência da integral imprópria
$$\int_1^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}\,dx\,.$$

Exercício

Estudar a convergência da integral imprópria de 1.a espécie
$$\int_1^{\infty} \frac{x^2-1}{\sqrt{x^6+16}}\,dx\,.$$

Exercício

Estudar a convergência da integral imprópria $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,dx$.

Exercício

Estudar a convergência da integral imprópria de 1.a espécie

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4}\, dx\,.$$

Teorema

Seja $f : [a\,,\infty) \to \mathbb{R}$ *uma função integrável em* $[a\,,b]$, *para cada* $b \in [a\,,\infty)$. *Se a integral imprópria* $\displaystyle\int_a^{\infty} |f(x)|\, dx$ *for convergente, então a integral imprópria* $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ *também será convergente e*

$$\left|\int_a^{\infty} f(x)\, dx\right| \leq \int_a^{\infty} |f(x)|\, dx\,.$$

Observação

Vale um resultado análogo ao Teorema acima, para integrais impróprias em $(-\infty\,,b]$ *e em* $(-\infty\,,\infty)$.