Oitava Lista de Exercícios Simplificada de SMA354 - Cálculo II
Derivadas parciais, gradiente, derivada direcional de funções a valores reais, de várias variáveis reais.
Professores Wagner e Marcelo

Exercício 1 *Em cada um dos itens abaixo, calcule todas as derivadas parciais de primeira ordem da função f dada, em cada ponto do seu respectivo domínio, onde :*

$$\begin{aligned}
&\textbf{(a)}\ f(x,y) \doteq \frac{2x^4 - xy + 1}{xy}, \quad \textit{para } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0);\, x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,y);\, y \in \mathbb{R}\} \\
&\textbf{(b)}\ f(x,y) \doteq \arctan \frac{x}{y}, \quad \textit{para } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0);\, x \in \mathbb{R}\} \\
&\textbf{(c)}\ f(x,y) \doteq \operatorname{sen}\left(x^2 - y^3\right), \quad \textit{para } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\
&\textbf{(d)}\ f(x,y,z) \doteq xy + xz + yz, \quad \textit{para } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ .
\end{aligned} \tag{1}$$

Exercício 2 *Encontre o valor da derivada parcial* $f_y(1,2)$*, onde* $f : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$*, é dada por*

$$f(x,y) \doteq x^{x^{x^y}} + \operatorname{sen}(\pi x)\left[x^2 + \operatorname{sen}(x+y) + e^x \cos^2(y)\right] .$$

Exercício 3 *Calcule todas as derivadas parciais de segunda ordem das funções do exercício 1, nos seus respectivos domínios.*

Exercício 4
(a) *Mostre que a função* $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*, dada por*

$$U(x,y) \doteq e^{-x}\cos(y) + e^{-x}\operatorname{sen}(y), \quad \textit{para } (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

satisfaz a, assim chamada, **Equação de Laplace***:*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(x,y) = 0, \quad \textit{para } (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(b) *Mostre que a função* $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*, dada por*

$$u(t,x) \doteq e^{-25t}\operatorname{sen}(5x), \quad \textit{para } (t,x) \in \mathbb{R}^2$$

é solução da, assim chamada, **Equação do Calor**

$$u_t(t,x) = u_{xx}(t,x), \quad \textit{para } (t,x) \in \mathbb{R}^2 .$$

Exercício 5 *Sejam* $\phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *duas funções com duas derivadas contínuas em* $\mathbb{R}$ *e* $c \in \mathbb{R}$ *uma constante fixada. Mostre que a função* $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*, dada por*

$$u(t,x) \doteq \phi(x - ct) + \psi(x + ct), \ \textit{para } (t,x) \in \mathbb{R}^2,$$

satisfaz a **Equação da Onda Unidimensional***, isto é, a equação*

$$u_{tt}(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x), \ \textit{para } (t,x) \in \mathbb{R}^2 .$$

Exercício 6 *Seja* $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$f(x,y) \doteq \begin{cases} \dfrac{(x+y)\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Questões:

(a) *a função* $\underline{f}$ *é contínua no* $(0,0)$*? Justifique sua resposta.*
(b) *a função* $\underline{f}$ *é contínua para* $(x,y) \neq (0,0)$*? Justifique sua resposta.*
(c) *Existem as derivadas parciais*

$$f_x(0,0), \quad f_y(0,0) \ ?$$

Caso afirmativo, encontre os valores das mesmas.
(d) *Encontre*

$$f_x(x,y), \quad f_y(x,y)$$

para $(x,y) \neq (0,0)$.

Exercício 7 *Em cada um dos itens abaixo, encontre o gradiente da função* $\underline{f}$*, em cada um dos pontos dos seus respectivos domínios.*

(a) $f(x,y,z) \doteq x^2+y^2+z^2$, *para* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ **(b)** $f(x,y,z) \doteq x \operatorname{arctg}(y+z)$, *para* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$
(c) $f(x,y) \doteq \operatorname{sen}\left(x y^2\right)$, *para* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ **(d)** $f(x,y) \doteq e^{x^2-y^2}$, *para* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

Exercício 8 *Em cada um dos itens abaixo temos que*

$$z(t) \doteq f(x(t), y(t)), \ para \ \ t \in \mathrm{Dom}(z).$$

Encontre a derivada $z'(t) = \dfrac{dz}{dt}(t)$*, para* $t \in \mathrm{Dom}(z)$*, para cada ums dos seguintes casos:*

(a) $f(x,y) \doteq \tan\left(x^2+y\right)$, *onde* $x = 2t$ *e* $y = t^2$
(b) $f(x,y) \doteq e^x\left[\cos(x)+\cos(y)\right]$, *onde* $x = t^3$ *e* $y = t^2$
(c) $f(x,y) \doteq \dfrac{x}{y}$, *onde* $x = e^{-t}$ *e* $y = \ln(t)$

Exercício 9 *Suponha que a função* $h:\mathrm{Dom}(h) \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$h(u,v) \doteq f(x(u,v), y(u,v)),$$

onde $\mathrm{Dom}(h) \doteq \{(u,v) \in \mathbb{R}^2;\ (x(u,v), y(u,v)) \in \mathrm{Dom}(f),\ para\ (x,y) \in \mathrm{Dom}(u) \cap \mathrm{Dom}(v)\}$.

Em cada um dos casos abaixo, encontre $\dfrac{\partial h}{\partial u}(u,v)$ *e* $\dfrac{\partial h}{\partial v}(u,v)$*, para* $(u,v) \in \mathrm{Dom}(h)$.

(a) $f(x,y) \doteq 1-x^2-y^2, x(u,v) \doteq u\cos(v), y(u,v) \doteq u \operatorname{sen}(v)$, *para* $(u,v) \in \mathbb{R}^2$
(b) $f(x,y) \doteq 1+x^2-y^2, x(u,v) \doteq u-v, y(u,v) \doteq u+v$, *para* $(u,v) \in \mathbb{R}^2$
(c) $f(x,y) \doteq 1-4x^2+9y^2, x(u,v) \doteq 2u\cos(v), y(u,v) \doteq 3u \operatorname{sen}(v)$, *para* $(u,v) \in \mathbb{R}^2$

Exercício 10 *Em cada um dos itens abaixo:*
(i) *Calcule as derivadas direcionais de* f *na direção do vetor* v *e no ponto* P *dados.*
(ii) *Encontre a direção em que a funçao* $\underline{f}$ *decresce mais rapidamente, à partir do ponto* P_o *dado.*

$$\textbf{(a)}\ f(x,y) \doteq x\,y - x + y\,,\ v \doteq (1,1)\,,\ P_o \doteq (1,1)$$
$$\textbf{(b)}\ f(x,y) \doteq \ln\left(x^2 + y^4 + 4\right)\,,\ v \doteq \left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\,,\ P_o \doteq (1,0)$$
$$\textbf{(c)}\ f(x,y,z) \doteq \frac{x - e^y}{x^2 + y^4 + 1}\,,\ v \doteq (2,2,0)\,,\ P_o \doteq (1,1,1)$$

Exercício 11
(a) *Determine as equações gerais das retas normal e tangente à curva plana*

$$x^2 + x\,y + y^2 - 3y = 1$$

no ponto $P_o \doteq (1,2)$.
(b) *Determine as equações gerais retas normal e tangente à curva plana*

$$y - e^{x^2} = 1\,,$$

no ponto $P_o \doteq (0,2)$.

Exercício 12 *Verifique se existem pontos sobre a curva*

$$x^2 - y^2 = 1$$

tais que a reta tangente à curva nestes pontos seja paralela à reta $y = 2x$. *Caso existam determine-os.*

Exercício 13
(a) *Encontre uma equação geral do plano tangente à superfície* $x + y^2 + z = 4$, *que contém o ponto* $P_o \doteq (1,1,2)$.
(b) *Determine uma equação geral plano tangente à superfície* $x^3 + y^3 + z^3 = 10$, *contém o ponto* $P_o \doteq (1,1,2)$.

Exercício 14 *Verifique se existem pontos na esfera* $S \doteq \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ *tais que o plano tangente à superfície* $\underline{S}$, *nestes pontos, seja paralelo ao plano* $3x - y + z = 7$. *Caso existam determine-os.*