Funções a valores reais, de várias variáveis reais

Seja $\mathbb{R}^n \doteq \{\vec{x} \doteq (x_1, \cdots, x_n) ; x_i \in \mathbb{R}, \text{ para } i \in \{1, \cdots, n\}\}$.

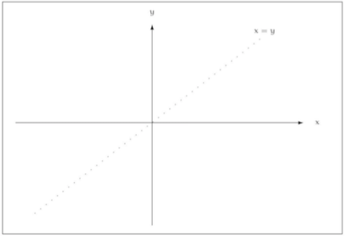
Exemplo

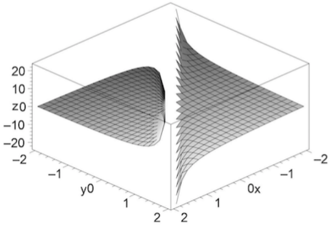
Consideremos a função $f : D(f) \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$f(x, y) \doteq \frac{x+y}{x-y}, \quad \textit{para } (x, y) \in D(f) \doteq \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \neq y\right\}.$$

Determinar a representação geométrica do domínio e do gráfico da função $\underline{f}$.

Resolução:





Exemplo

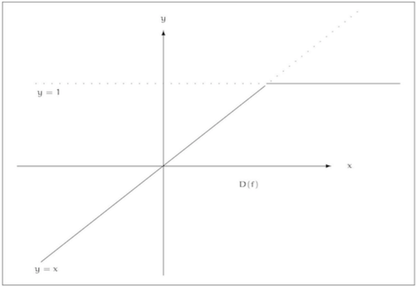
Consideremos a função $f : D(f) \to \mathbb{R}$, *dada por*

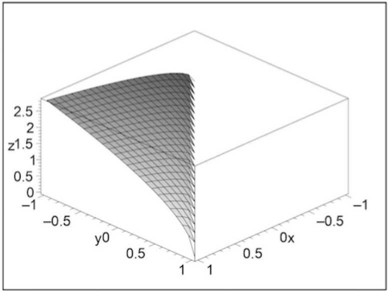
$$f(x,y) \doteq \sqrt{x-y} + \sqrt{1-y}$$

$$\text{para} \quad (x,y) \in D(f) \doteq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \, y \leq x \text{ e } y \leq 1\right\} .$$

Encontre a representação geométricas do domínio e do gráfico da função $\underline{f}$.

Resolução:





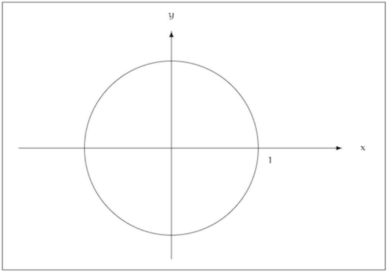
Exemplo

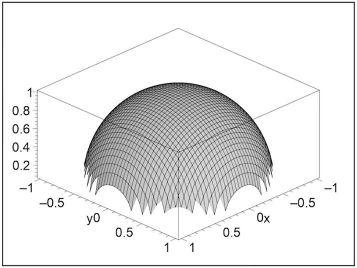
Consideremos a função $f : D(f) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada, implicitamente por* $z = f(x\,,y)$, *para cada* $(x\,,y) \in D(f)$, *que satisfazem a seguinte identidade:*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1\,, \text{ com } z \in [0\,,\infty)\,.$$

Representar, geometricamente, o domínio e o gráfico da função $\underline{f}$.

Resolucão:





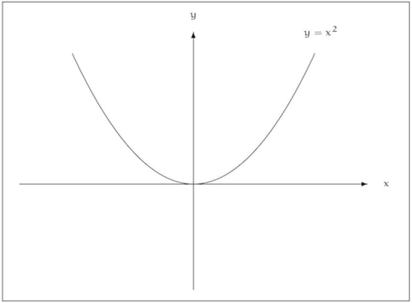
Exemplo

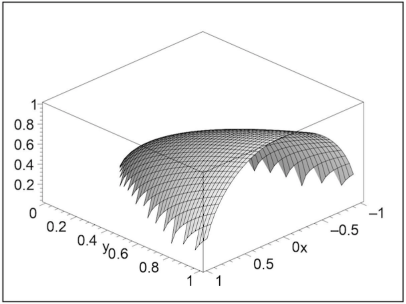
Consideremos a função $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$f(x\,,y) \doteq \sqrt{y - x^2} \quad para\ (x\,,y) \in D(f) \doteq \{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2 \leq y\}\,.$$

Representar, geometricamente, o domínio e o gráfico da função $\underline{f}$.

<u>Resolução:</u>





Definição

Diremos que a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *é uma* **<u>função linear</u>**, *se puder ser colocada na seguinte forma*

$$f(x\,,y) \doteq a\,x + b\,y \quad para \quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,,$$

onde $a\,,b \in \mathbb{R}$ *são fixados.*

Observação

A representação geométrica do gráfico de uma função linear, será um plano em $\underline{\mathbb{R}^3}$, *que passa pela origem* $O \doteq (0\,,0\,,0)$, *ou seja, um plano que tem uma equação geral dada por:*

$$\pi \ : \ a\,x + b\,y - z = 0\,.$$

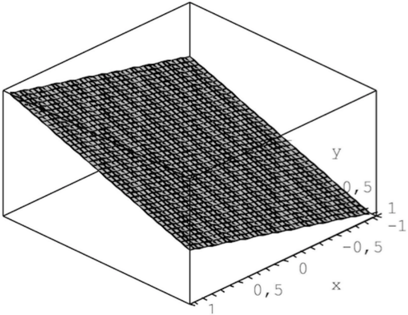
Exemplo

A função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x\,,y) \doteq 2\,x - 3\,y\,,\ \textit{para cada}\ \ (x\,,y) \in \mathbb{R}^2$$

é uma função linear em $\underline{\mathbb{R}^2}$. *Obtenha a representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$.

Resolução:



Definição

Uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *será dita* **função linear-afim**, *se puder ser colocada na seguinte forma*

$$f(x, y) \doteq a\,x + b\,y + c\,, \quad \text{para cada} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2\,, \qquad (1)$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ *são fixados.*

Observação

A representação geométrica do gráfico de uma função linear-afim, será, em geral, um plano em $\underline{\mathbb{R}^3}$, *cuja equação geral será dada por:*

$$\pi \; : \; a\,x + b\,y + c - z = 0\,.$$

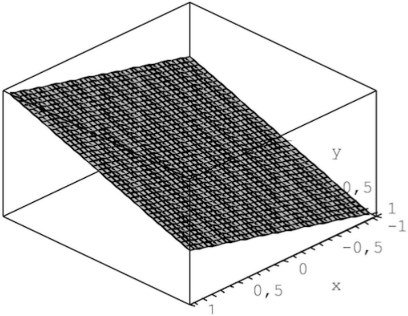
Exemplo

Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *é dada por*

$$f(x, y) = x + 3\,y - 2 \quad para \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Obtenha a representação geométrica do seu gráfico.

Resolução: Notemos que a função f é uma função linear-afim em $\mathbb{R}^2$.



Definição

Seja $p \in \mathbb{Z}^+ \doteq \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ *fixado. Uma* **função polinomial de grau $\underline{p}$, de duas variáveis, a valores reais**, *é uma função* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *que pode ser escrita na seguinte forma:*

$$f(x, y) \doteq \sum_{m+n \leq p} a_{mn}\, x^m\, y^n \ \ \textit{para}\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

os coeficientes $\underline{a_{mn} \in \mathbb{R}}$, *onde* $a_{mn} \neq 0$, *para algum* $(m, n) \in \mathbb{Z}^+$, *satisfazendo* $m + n = p$.

Exemplo

A função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x, y) \doteq x^2 + y^2, \ \ \textit{para cada}\ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

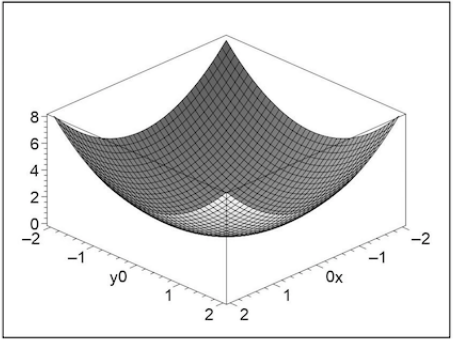
é uma função polinomial, de grau $\underline{2}$, *de duas variáveis reais.*
Obtenha a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$.

Resolução: como foi visto na disciplina de Geometria Analítica, a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$, é o paraboloide de revolução, obtido da rotação do gráfico da parábola

$$z = x^2 \, ,$$

contida no plano xOz, em torno do eixo Oz, cuja equação é dada por (veja a figura abaixo)

$$z = x^2 + y^2 \, .$$



Exemplo

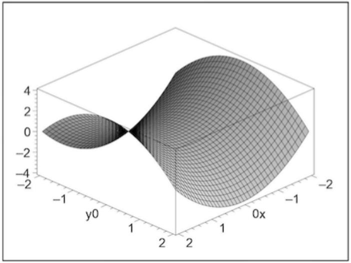
A função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*, dada por*

$$f(x\,,y) \doteq x^2 - y^2\,, \text{ para cada } (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,,$$

é uma função polinomial, de grau $\underline{2}$*, de duas variáveis reais. Obtenha a representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$*.*

Resolução: como foi visto na disciplina de Geometria Analítica, a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é o paraboloide hiperbólico (ou sela), a saber:

$$z = x^2 - y^2\,.$$



Exemplo

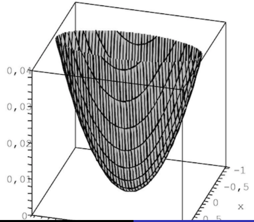
A função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x\,,y) \doteq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\;, \text{ para } (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,,$$

é uma função polinomial, de grau $\underline{2}$, de duas variáveis reais, onde $a\,,b > 0$ estão fixos. Obtenha a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$.

<u>**Resolução:**</u> como foi visto na disciplina de Geometria Analítica, a representação geométrica do seu gráfico é o paraboloide elíptico, a saber:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\,.$$



Definição

Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x_1, \cdots, x_n) \doteq \frac{p(x_1, \cdots, x_n)}{q(x_1, \cdots, x_n)} \quad para \quad (x_1, \cdots, x_n) \in Dom(f),$$

onde as funções $\underline{p}$ *e* $\underline{q}$ *são funções polinomiais de* $\underline{n}$*-variáveis e*

$$Dom(f) \doteq \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; q(x_1, \cdots, x_n) \neq 0\} ,$$

será dita **função racional, de** $\underline{n}$**-variáveis reais, a valores reais**.

Exemplo

A função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$f(x, y) \doteq \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} \; para \; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) ; x^2 - y^2 = 0\} ,$$

é uma função racional, de duas variáveis reais.

Definição

Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$, *não vazio. Uma função* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *será dita* **limitada no conjunto** $\underline{A}$, *se podemos encontrar* $M \geq 0$, *de modo que*

$$|f(x)| \leq M\,, \quad para\ x \in A\,.$$

Definição

Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$, *não vazio e* $p \in \mathbb{R}^n$. *Uma função* $f : A \setminus \{p\} \to \mathbb{R}$ *será dita* **limitada no ponto** $\underline{p \in A}$, *se podemos encontrar* $r > 0$, *de modo que a função* $\underline{f}$, *quando restrita ao conjunto*

$$[A \cap \mathcal{B}_r(p)] \setminus \{p\}\,,$$

for uma função limitada no conjunto $[A \cap \mathcal{B}_r(p)] \setminus \{p\}$, *ou seja, existe* $M_r > 0$, *de modo que*

$$|f(x)| \leq M_r\,, \quad para\ x \in [A \cap \mathcal{B}_r(p)] \setminus \{p\}\,,$$

$$onde \quad \mathcal{B}_r(p) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, \|x - p\| < r\}\,.$$

Exemplo

Consideremos a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$f(x\,,y) \doteq \operatorname{sen}\left(x^2\,y\right) + \cos\left(x\,y^2\right) \;\; \textit{para} \; (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Mostre que a função $\underline{f}$ *é limitada em* $\underline{\mathbb{R}^2}$.

Resolução: consideremos

$$M \doteq 2\,, \;\; \text{para} \; (x\,,y) \in \mathbb{R}^2, \text{ segue que:}$$

$$|f(x\,,y)| = |\operatorname{sen}\left(x^2\,y\right) + \cos\left(x\,y^2\right)| \leq \underbrace{|\operatorname{sen}\left(x^2\,y\right)|}_{\leq 1} + \underbrace{|\cos\left(x\,y^2\right)|}_{\leq 1}$$

$$\leq 1 + 1 = 2 = M\,,$$

mostrando que a função $\underline{f}$ é limitada em $\underline{\mathbb{R}^2}$.

$\square$

Por outro lado, temos o (veja as notas de aula):

Exemplo

Consideremos a função $f : A \doteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x\,,y) = \frac{1}{x^2 + y^2}\,, \quad \textit{para cada} \qquad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0\,,0)\}.$$

A função $\underline{f}$ ***<u>não</u>*** *é uma função limitada em*

$$A \doteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0\,,0)\}\,,$$

mas é uma função limitada em qualquer ponto $P_o \in A$*, fixado.*

Funções de duas variáveis reais, a valores reais: curvas de nível

Definição

Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^2$ *não vazio e* $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *função, de duas variáveis reais, a valores reais e* $c \in \mathbb{R}$. *O conjunto*

$$f^{-1}(\{c\}) \doteq \{(x\,,y) \in A\,;\; f(x\,,y) = c\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

será denominado **curva de nível do gráfico função** $\underline{f}$**, correspondente ao nível** $z = c$.

Observação

- *O conjunto* $f^{-1}(\{c\})$ *é formado por elementos do domínio da função* $\underline{f}$ *(isto é, um subconjunto de* $\mathbb{R}^2$*), cujas imagem são iguais a* $\underline{c}$. *Já o gráfico da função* $\underline{f}$ *é um subconjunto de* $\underline{\mathbb{R}^3}$.
- *A função* $\underline{f}$ *assume um mesmo valor, sobre os pontos de uma curva de nível fixada.*

Exemplo

Sejam $k \in \mathbb{R}$ fixado e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ função dada por

$$f(x\,,y) \doteq k\,, \;\; \textit{para cada} \;\; (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,,$$

isto é, a função $\underline{f}$ é a função constante. Encontre as curvas de nível e a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$.

Resolução: notemos que a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é o plano $z = k$ em $\mathbb{R}^3$. Neste caso, as curvas de nível $c = k$, associadas à função $\underline{f}$, serão todas as curvas que estão contidas no plano xOy, ou seja, o $\mathbb{R}^2$.
Por outro lado, se $c \neq k$, não teremos curvas de nível $\underline{c}$, ou seja, será o conjunto vazio, ou seja

$$f^{-1}(\{c\}) = \begin{cases} \mathbb{R}^2\,, & \text{se } c = k \\ \emptyset\,, & \text{se } c \neq k \end{cases} \,.$$

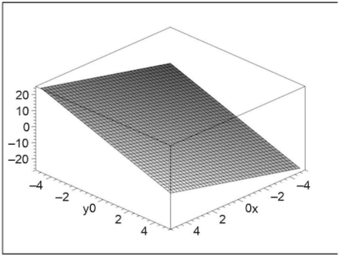
Exemplo

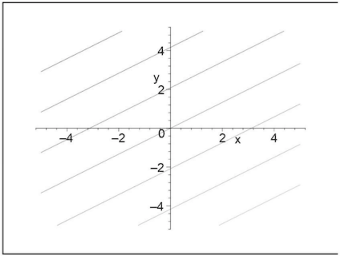
Sejam $a\,,b\,,c \in \mathbb{R}$ *fixos e consideremos* $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *a função dada por*

$$f(x\,,y) \doteq a\,x + b\,y + c\,, \quad para \quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Encontre algumas curvas de nível e a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$.

Resolução:





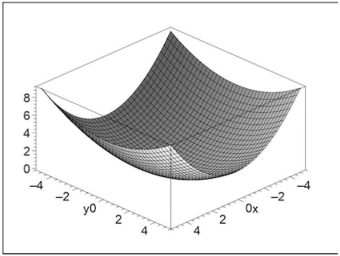
Exemplo

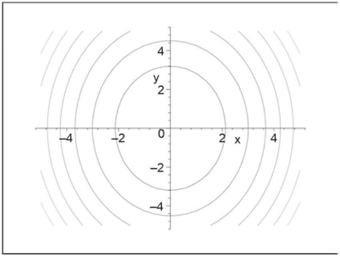
Sejam $a\,,b$ números reais, não nulos, fixos e consideremos a função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x\,,y)\doteq\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\,,\quad para\quad (x\,,y)\in\mathbb{R}^2\,.$$

Encontre algumas curvas de nível e a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$.

Resolução: se $a\neq b$, a representação geométrica gráfico da função $\underline{f}$, nos fornecerá um parabolóide elíptico e se $a=b$ teremos um parabolóide de revolução (visto na Geometria Analítica.)





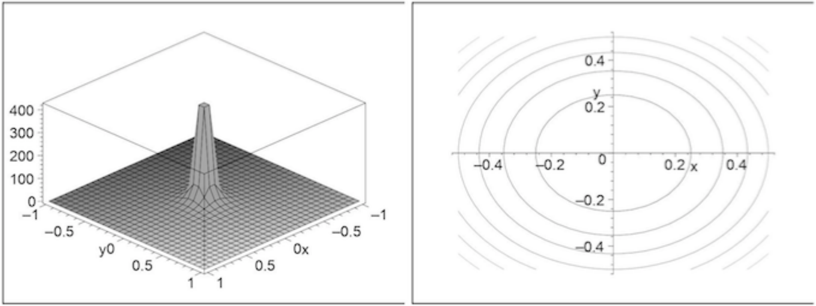
Exemplo

Consideremos a função $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0\,,0)\} \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$f(x\,,y) \doteq \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2}\,, & se \quad (x\,,y) \neq (0\,,0) \\ 0\,, & se \quad (x\,,y) = (0\,,0) \end{cases}.$$

Encontre algumas curvas de nível e a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$.

Resolução:



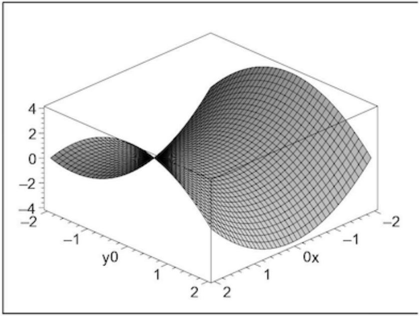
Exemplo

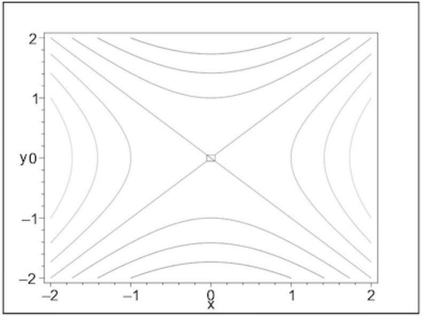
Consideremos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$f(x\,,y) \doteq x^2 - y^2\,,\ \textit{para cada}\ \ (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Encontre algumas curvas de nível e a representação geométrica do gráfico da função f.

Resolução: a representação geométrica do gráfico da função f é o parabolóide hiperbólico ou sela (visto em G.A.) ,





Nas notas temos também o:

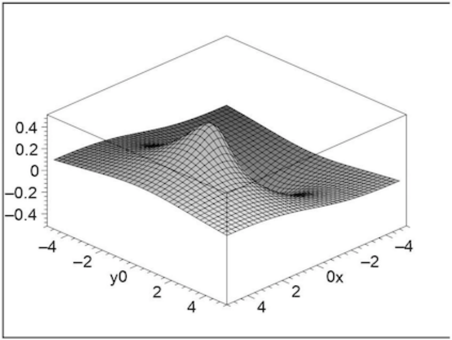
Exercício

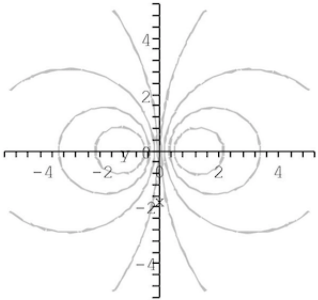
Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, a função dada por

$$f(x, y) \doteq \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad \textit{para cada} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 .$$

Encontre algumas curvas de nível e a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$.

Resolução:





Superfícies de nível

Uma função $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tem o seu gráfico contido em $\underline{\mathbb{R}^4}$ e este será dado por:

$$G(f) \doteq \{(x\,,y\,,z\,,f(x\,,y\,,z))\;;\;(x\,,y\,,z) \in A\} \subseteq \mathbb{R}^4\,.$$

Definição

Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^3$ não vazio e $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função. Dado $c \in \mathbb{R}$, o conjunto

$$f^{-1}(\{c\}) \doteq \{(x\,,y\,,z) \in A\;;\;f(x\,,y\,,z) = c\} \subseteq \mathbb{R}^3\,,$$

será denominado **superfície de nível $\underline{c}$ associada à função $\underline{f}$**.

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, *a função dada por*

$$f(x, y, z) \doteq x^2 + y^2 - z\,, \;\; \textit{para cada} \;\; (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,.$$

Encontre algumas superfícies de nível, associadas à função $\underline{f}$.

Resolução: