9.a Lista de Exercícios Simplificada - SMA354 - Cálculo II
Derivadas de ordens superiores, máximos, mínimos locais e globais, multiplicadores de Lagrange
Professores Wagner e Marcelo

**Exercício 1** *Suponhamos que as funções* $u, v \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$, *onde o conjunto* $\underline{\Omega}$ *é um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^2$, *satisfazem as* **equaçõeses de Cauchy-Riemann** *em* $\underline{\Omega}$, *ou seja:*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \qquad e \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\,, \quad \textit{para cada} \quad (x,y) \in \Omega\,.$$

*Mostre que as funções* $\underline{u}$ *e* $\underline{v}$ *são funções harmônicas em* $\underline{\Omega}$.

**Exercício 2** *Sejam* $u, v \in C^2\left(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}\right)$, *tais que*

$$v(r,\theta) = u(x,y)\,,$$

*onde*

$$\begin{cases} x \doteq r\cos(\theta) \\ y \doteq r\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases} .$$

*Verifique que*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(r,\theta)\,.$$

**Exercício 3** *Em cada um dos itens abaixo, encontre todos os pontos de máximos, mínimos locais e sela da função* $f : A \overset{\textit{aberto}}{\subseteq} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

**(a)** $f(x,y) \doteq x^2 + 3xy + 4y^2 - 6x + 2y$, *para* $(x,y) \in A \doteq \mathbb{R}^2$

**(b)** $f(x,y) \doteq x^3 + 2xy + y^2 - 5x$, *para* $(x,y) \in A \doteq \mathbb{R}^2$

**(c)** $f(x,y) \doteq x^5 + y^5 - 5x - 5y$, *para* $(x,y) \in A \doteq \mathbb{R}^2$

**(d)** $f(x,y) \doteq 18x^2 - 32y^2 - 36x - 128y - 110$, *para* $(x,y) \in A \doteq \mathbb{R}^2$

**(e)** $f(x,y) \doteq (x-1)^2 + 2y^2$, *para* $(x,y) \in A \doteq \mathbb{R}^2$

**(f)** $f(x,y) \doteq x^2 + xy + y^2 - 2x - y$, *para* $(x,y) \in A \doteq \mathbb{R}^2$

**(g)** $f(x,y) \doteq \frac{1}{x} - \frac{64}{y} + xy$, *para* $(x,y) \in A \doteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y);\, x = 0 \textit{ ou } y = 0\}$

**(h)** $f(x,y) \doteq \left(x^2 + y^2\right) e^{-(x^2+y^2)}$, *para* $(x,y) \in A \doteq \mathbb{R}^2$

**(i)** $f(x,y) \doteq \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$, *para* $(x,y) \in A \doteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y);\, x = 0 \textit{ ou } y = 0\}$

**Exercício 4** *Determinar e classificar todos os pontos extremos locais da função* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *onde*

$$f(x,y) \doteq (x-y)^6 + (y-2)^2\,, \quad \textit{para cada} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

*Observação: o teste do hesssiano pode não ser conclusivo.*

**Exercício 5** *Determine o ponto do plano*

$$x + 2y - z = 4$$

*mais próximo da origem.*

**Exercício 6** *Determine os valores máximos e mínimos da função* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$f(x, y) \doteq y^2 - x^2\,, \quad \textit{para cada} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

*quando é restrita ao disco*

$$D \doteq \left\{ (x, y)\,;\, (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

**Exercício 7** *Dividir* 120 *em três partes, de modo que a soma dos produtos das partes, tomadas duas a duas, seja o maior possível.*

**Exercício 8** *Representar um número positivo* $\underline{a}$, *como um produto de quatro fatores positivos, cuja soma seja a menor possível.*

**Exercício 9**
**(a)** *Determine as coordenadas do ponto* $\underline{P}$, *pertencente à superfície*

$$x^2 + 2y^2 - z^2 = 1\,,$$

*que diste o menos possível do ponto* $O \doteq (0, 0, 0)$ .
**(b)** *Determine as coordenadas do ponto* $\underline{P}$, *pertencente à reta*

$$a\,x + b\,y = c\,,$$

*onde* $(a, b) \neq (0, 0)$, *que diste o menos possível do ponto* $P_o \doteq (x_o, y_o)$ *fixado.*
**(c)** *Determine as coordenadas do ponto* $\underline{P}$, *pertencente ao plano*

$$a\,x + b\,y + c\,z = 0\,,$$

*onde* $a, b, c \neq 0$, *que diste o menos possível do ponto* $P_o \doteq (x_o, y_o, z_o)$ *fixado.*

**Exercício 10** *Em cada um dos itens abaixo, utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange, determinar os extremos das funções* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *quando restritas aos respectivos vínculos:*

(**a**) $f(x, y) \doteq x\,y$, *para* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, *vínculo:* $x + y = 1$.
(**b**) $f(x, y) \doteq x^2 + y^2$, *para* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, *vínculo:* $3\,x + 2\,y = 6$.
(**c**) $f(x, y) \doteq x^2 + y^2$, *para* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, *vínculo:* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, *para* $a > b > 0$.

**Exercício 11** *Encontre todos os pontos na elipse*

$$x^2 + 2\,y^2 = 1\,,$$

*de modo que a função* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$f(x, y) \doteq x\,y\,, \quad \textit{para cada} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

*possuía valores extremos (ou seja, máximo ou mínimo quando restrita à elipse).*

**Exercício 12** *Quais as dimensões de um tanque metálico cilíndrico, sem tampa, de capacidade de* $8\,000\,\mathrm{m}^3$, *que use menos* $\underline{\mathrm{m}^2}$ *de material possível, na sua construção ?*

**Exercício 13** *Encontre as dimensões de uma tanque cilíndrico reto, com tampa, que tenha a menor área de superfície e cujo volume seja igual a* $16\pi\,\mathrm{cm}^3$.

**Exercício 14** *Encontre as dimensões de um paralelepípedo retângulo, com tampa, que tenha máximo volume e cujos vértices pertencem à esfera unitária centrada na origem.*

**Exercício 15** *Encontre os valores extremos da função* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$f(x\,,y\,,z) \doteq x^2\,y\,z + 1\,, \quad \textit{para cada} \quad (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,,$$

*quando restrita a intersecção do plano*

$$z = 1$$

*com a esfera*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 10\,.$$

**Exercício 16** *Encontre o paralelepípedo retangular que possua maior volume, cujos vértices pertencem ao elipsóide*

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{36} = 1$$

**Exercício 17** *Deseja-se construir uma caixa fechada, na forma de um paralelepípedo retângulo, cujo volume é de* $30\,\mathrm{m}^3$. *Suponhamos que os materiais para fabricação do fundo e da tampa custem* R\$ 3,00 *por* $\mathrm{m}^2$, *para a construção de duas partes laterais opostas, seja* R\$ 4,00 *por* $\mathrm{m}^2$ *e das outras duas partes laterais seja de* R\$ 6,00 *por* $\mathrm{m}^2$. *Pergunta-se: quais dimensões da caixa para que custo para construí-la seja o menor possível?*

**Exercício 18** *Encontre o máximo e mínimo globais da função* $f : \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right] \times \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$f(x\,,y) \doteq \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y) + \operatorname{sen}(x+y)\,, \quad \textit{para cada} \quad (x\,,y) \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right] \times \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]\,.$$

**Exercício 19** *Determine os valores máximo e mínimo globais da função* $f : A \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$f(x\,,y) \doteq x^3 + y^3 - 3\,x\,y\,, \quad \textit{para cada} \quad (x\,,y) \in A$$

*onde*

$$A \doteq [0\,,2] \times [-1\,,2]\,.$$