1.a Lista - SMA354-Cálculo II - Exercícios resolvidos selecionados

1.o semestre de 2020

1. (a) $\int_{-3}^{2} |x+1|\ dx = \int_{-3}^{-1} -(x+1)dx + \int_{-1}^{2} (x+1)dx = -(\frac{x^2}{2}+x)\Big|_{-3}^{-1} + (\frac{x^2}{2}+x)\Big|_{-1}^{2} = -(\frac{1}{2}-1-\frac{9}{2}+3) + (2+2-\frac{1}{2}+1) \rightarrow \int_{-3}^{2} |x+1|dx = \frac{13}{2}$

   (b) Como estudado em cálculo I, sabemos que: $\frac{d(\ \text{arcsen}(x))}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
   Com isso, podemos resolver o exercício:

   $$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d(\ \text{arcsen}(x))}{dx}dx = \ \text{arcsen}(x)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6}$$

   finalizando a resolução.

   (c) $\int_7^{12} dx = x\Big|_7^{12} = 12-7 = 5$

   (d) Nesse item, basta usar integração de polinômios (é como uma "Regra do tombo inversa"):

   $$\int_{-3}^{2}(5+x-6x^2)dx = (5x+\frac{x^2}{2}-\frac{6x^3}{3})\Big|_{-3}^{2} = 10+2-16+15-\frac{9}{2}-54 = -\frac{95}{2}$$

   (e) Semelhante a letra d). Basta aplicar distributiva e fazer a integral do polinômio.

   (f) Semelhante a letra d). Note agora que há um produto notável no numerador que pode ser simplificado com o denominador: $x^2-1 = (x+1)(x-1)$

   (g) Pode ser feito por frações parciais ou por substituição trigonométrica. Faremos pelo segundo método. A substituição mais adequada é:
   $v = sen(\theta); dv = \cos(\theta)d\theta$. Lembrando também de mudar os extremos de integração: $v = 0 \rightarrow \theta = 0; v = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$. Assim, a integral reescrita fica:

   $$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-v^2)^2}dv = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(\theta)}{(1-\text{sen}^2(\theta))^2}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(\theta)}{\cos^4(\theta)} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec^3(\theta)d\theta$$

   $$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec^2(\theta)\sec(\theta)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\tan^2(\theta))\sec(\theta)d\theta$$

   $$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec(\theta) + \sec(\theta)\tan^2(\theta)d\theta = \ln|\sec(\theta)+\tan(\theta)|\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec(\theta)\tan^2(\theta)$$

   A nova integral é feita aplicando integração por partes com:
   $u = \tan(\theta); dv = \ \sec(\theta)\tan(\theta)d\theta$ e portanto: $du = \ \sec^2(\theta)d\theta; v = \ \sec(\theta)$. Dessa forma, a integral fica:

$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec(\theta)\tan^2(\theta) = uv - \int v du = \sec(\theta)\tan(\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec^3(\theta)d\theta$

Note que voltamos a integral inicial. Assim temos:

$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec^3(\theta)d\theta = \ln|\sec(\theta)+\tan(\theta)|\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \ sec(\theta)\tan(\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec^3(\theta)d\theta$

$2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec^3(\theta)d\theta = \ln|\sec(\theta)+\tan(\theta)|\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \sec(\theta)\tan(\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$

$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec^3(\theta)d\theta = \frac{1}{2}(\ln|\sec(\theta)+\tan(\theta)|\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + sec(\theta)tan(\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}})$

Fazendo as substituições dos extremos, o resultado será:

$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec^3(\theta)d\theta = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-v^2)^2}dv = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\ln 3.$

finalizando a resolução.

(h) Neste item, deve-se usar integração por partes com: $u = x^2; dv = e^x\,dx$ e portanto: $du = 2x\,dx; v = e^x$. Com isso, a integral fica:

$\int_0^1 x^2e^x\,dx = uv - \int v\,du = x^2\,e^x - \int_0^1 e^x 2x\,dx$

Percebemos que será necessária uma nova integração por partes, dessa vez com: $u = 2x; dv = e^x dx$ e $du = 2dx; v = e^x$. Assim temos:

$\int_0^1 x^2e^x dx = x^2e^x\Big|_0^1 - \left(2xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 2e^x dx\right) = (x^2e^x - 2xe^x + 2e^x)\Big|_0^1$

Fazendo as substituições dos extremos de integração, concluímos que o resultado é:

$$\int_0^1 x^2e^x dx = e - 2$$

finalizando a resolução.

(i) Semelhante a letra h). Novamente deve-se aplicar integração por partes duas vezes (primeira com $u = \cos(x); dv = e^x\,dx$ e segunda com $u = \text{sen}(x); dv = e^x\,dx$) e na segunda vez voltará na integral inicial, podendo passar pro outro lado e calcular o valor final da integral.

(j) Aplicaremos o Teorema da substituição para a integral definida:

$$\int_0^1 \tanh(x)dx = \int_0^1 \frac{\text{senh}(x)}{\cosh(x)}dx \overset{\begin{cases} u \doteq \cosh(x)\,, \text{ logo } du = \text{senh}(x)\,dx \\ x = 0\,, \text{ teremos: } u = 1 \\ x = 1\,, \text{ teremos: } u = \cosh(1) \end{cases}}{=} \int_1^{\cosh(1)} \frac{1}{u}du$$

$= \ln|u|\Big|_1^{\cosh(1)} \quad \ln|\cosh(1) - \cosh(0)|.$

Substituição na segunda igualdade: $\cosh(x) = u; du = \text{senh}(x)\,dx$

(k) Semelhante a letra h). Aqui, só precisa de uma integração por partes com $u = x; dv = 2^x dx$. É importante lembrar que $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$

(l) Semelhante a letra d), mas antes de aplicar a integração de polinômio é importante fazer a seguinte substituição:

$u = 2x + 3; du = 2dx; x = \frac{u-3}{2}$ e notamos que para $x = 0$, teremos $u = 3$ e para $x = 1$, teremos $u = 5$. Depois disso, basta aplicar a distributiva e fazer a integração do polinômio.

2. (a) Como a função dada por $g(t)=(t^2 + 1)^{10}$ é contínua, pelo Teorema fundamental do cálculo (2.5.1 nas notas de aula), temos que a função f(x) é diferenciável em $[0, x]$. Assim teremos:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[\int_0^x (t^2 + 1)^{10} dt]$$

$$= \frac{d}{dx}[\int_0^x g(t) dt]$$

$$= g(x)$$

$$= (x^2 + 1)^{10}$$

finalizando a resolução.

(b) A integral apresentada é definida, ou seja, apresenta limites de integração constantes. Dessa forma, sabemos que o resultado da integral é um valor constante. Então:

$$f(x) = cte.$$

Portanto, como estudado em Cálculo 1, teremos que:

$$f'(x) = 0$$

finalizando a resolução.

(c) Como a função dada por $g(u) = \sqrt{u^4 + 4u^2}$ é contínua, pelo Teorema fundamental do cálculo (2.5.1 nas notas de aula), temos que a função f(x) é diferenciável em $[x, 0]$. Assim teremos:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[\int_x^0 \sqrt{u^4 + 4u^2} du]$$

$$= \frac{d}{dx}[-\int_0^x \sqrt{u^4 + 4u^2} du]$$

$$= -\frac{d}{dx}[\int_0^x g(u) du]$$

$$= -g(x)$$

$$= -\sqrt{x^4 + 4x^2}$$

finalizando a resolução.

(d) Semelhante a letra a).

(e) Como a função dada por $g(t)=\sqrt{t^2 + 1}$ é contínua, pelo Teorema fundamental do cálculo (2.5.1 nas notas de aula), temos que a função f(x) é diferenciável em $[sen(x), cos(x)]$. Assim teremos:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}[\int_{sen(x)}^{cos(x)} \sqrt{t^2+1}dt] \\
&= \frac{d}{dx}[\int_{sen(x)}^{cos(x)} g(t)dt] \\
&= g(\cos(x))\frac{d(\cos(x))}{dx} - g(\operatorname{sen}(x))\frac{d(\operatorname{sen}(x)(x))}{dx} \\
&= \sqrt{\cos^2(x)+1}(-\operatorname{sen}(x)) - \sqrt{\operatorname{sen}^2(x)+1}(\cos(x)) \\
&= -(\operatorname{sen}(x)\sqrt{\cos^2(x)+1} + \cos(x)\sqrt{\operatorname{sen}^2(x)+1})
\end{aligned}
$$

finalizando a resolução.

(f) Semelhante ao item e).

3. (a) Analisando a função $f(x) = x^2 + 4$ percebemos que ela é par, pois $f(x) = f(-x)$ para todo x real. Dessa forma, a integral pode ser reescrita como:

   $2\int_0^1 x^2 + 4dx = 2(\frac{x^3}{3} + 4x)\Big|_0^1 = 2(\frac{1}{3} + 4) = \frac{26}{3}$

   finalizando a resolução.

   (b) Analisando a função $f(x) = \operatorname{sen}(x^3) - x^7\cos(x)$ percebemos que ela é ímpar, pois $f(x) = -f(-x)$ para todo x real. Assim, como os extremos de integração são $\frac{17\pi}{4}$ e $-\frac{17\pi}{4}$ (um intervalo simétrico em relação à origem) então o resultado da integral é zero.

   (c) Semelhante a letra b). a função é ímpar.

4. Exercício de verificação: não farei resolução pois não é esse o foco. Qualquer dúvida sobre esse pode me enviar por e-mail.

5. Adotaremos que $F(x)$ é a primitiva de $f(x)$. Dessa forma, temos que: $\int_{-2}^{0} f(x)dx = F(0)-F(-2) = 3$. Agora, vamos calcular a integral pedida: $\int_0^2 f(x-2)dx = F(2-2)-F(2-0) = F(0)-F(2) = 3$, finalizando a resolução.

6. Façamos a mudança de variáveis $u \doteq 2x - 1$, para $x \in [0, , 1]$. Assim $du = 2\,dx$, ou seja, $dx = \frac{1}{2}\,du$ e para $x = 0$, teremos $u = -1$ e para $x = 1$, teremos $u = 1$.

   Logo, aplicando o Teorema da substituição para a integral definida, teremos $\int_0^1 f(2x-1)\,dx = \int_{-1}^{1} f(u)\,\frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(u)\,du = \frac{5}{2}$.