2.a Lista - SMA354-Cálculo II - Exercícios resolvidos selecionados

1.o semestre de 2020

1. (a) Podemos observar que a função é contínua em $[-\infty, -3] \cup [3, +\infty]$ e portanto, pelo teorema 2.3.1 nas notas de aula segue que a função é integrável nesses intervalos. Assim, podemos calcular a integral indefinida, aplicando a seguinte mudança de variável: $u = x^2 - 9 \rightarrow du = 2x dx$

   $\int (x^2-9)^{\frac{2}{3}} x dx = \frac{1}{2} \int u^{\frac{2}{3}} du = \frac{1}{2}\frac{3}{5} u^{\frac{5}{3}} = \frac{3}{10}(x^2-9)^{\frac{5}{3}} + C$

   Dessa forma, temos que $F(x) = \frac{3}{10}(x^2-9)^{\frac{5}{3}}$ é uma primitiva de f(x),
   o que se comprova pois $\frac{d(F(x))}{dx} = f(x)$. E a integral indefinida de
   f(x) é $\int (x^2-9)^{\frac{2}{3}} x dx = \frac{3}{10}(x^2-9)^{\frac{5}{3}} + C$, finalizando a resolução.

   (b) Podemos observar que a função é contínua em $\mathbb{R}$ e portanto, pelo teorema 2.3.1 nas notas de aula segue que a função é integrável em $\mathbb{R}$. Assim, podemos calcular a integral indefinida:

   $\int \frac{3+e^{4x}}{e^{4x}} dx = \int \frac{3}{e^{4x}} dx + \int \frac{e^{4x}}{e^{4x}} dx = 3\int e^{-4x} dx + \int 1 dx$

   $= -\frac{3}{4}(e^{-4x} + x) + C$

   Dessa forma, temos que $F(x) = -\frac{3}{4}(e^{-4x} + x)$ é uma primitiva de
   f(x),o que se comprova pois $\frac{d(F(x))}{dx} = f(x)$. E a integral indefinida
   de f(x) é $-\frac{3}{4}(e^{-4x} + x) + C$, finalizando a resolução.

   (c) Semelhante à letra b). Após separar a fração em duas deve-se usar a substituição $u = \ln(x) \rightarrow du = \frac{1}{x} dx$.

   (d) Semelhante à letra a).

2. (a) Aplicaremos a seguinte substituição: $u = x^3 + 2 \rightarrow du = 3x^2 dx$

   $\int \frac{8x^2}{x^3+2} dx = \frac{8}{3} \int \frac{1}{u} du = \frac{8}{3} \ln(u) = \frac{8}{3} \ln\left(x^3+2\right) + C$

   finalizando a resolução.

   (b) Aplicaremos a seguinte substituição: $u = x - 4 \rightarrow du = dx$

   $\int x\sqrt{x-4} dx = \int (u+4) u^{\frac{1}{2}} du = \int u^{\frac{3}{2}} du + 4\int u^{\frac{1}{2}} du$

   $= \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{3} u^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{5}(x-4)^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{3}(x-4)^{\frac{3}{2}} + C$

   finalizando a resolução.

   (c) Aplicaremos a seguinte substituição: $u = 2x + 3 \rightarrow du = 2dx$

   $\int (2x+3)^{11} dx = \frac{1}{2}\int u^{11} du = \frac{u^{12}}{24} = \frac{(2x+3)^{12}}{24} + C$

   finalizando a resolução.

(d) Semelhante à letra a). Usar $u = t^6 + 6t^2 \rightarrow du = 6(t^5 + 2t)dt$

(e) Semelhante à letra a). Lembrando que antes deve-se dividir a integral em duas e depois disso aplicar duas substituições diferentes.

(f) $\int[\sqrt{4t} + \cos(2t)]dt = 2\int t^{\frac{1}{2}}dt + \int \cos(2t)dt = \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}} + \frac{sen(2t)}{2} + C$

finalizando a resolução.

(g) Aplicaremos a seguinte substituição: $u = sen(t) \rightarrow du = \cos(t)dt$

$\int \frac{\cos(t)}{-sen^2(t)}dt = -\int \frac{1}{u^2}du = -\frac{-1}{u} = \frac{1}{sen(t)} = \csc(t) + C$

finalizando a resolução.

(h) Semelhante às letras a) e c).

3. (a) Para a integração por partes, usaremos a seguinte substituição:
$u = \ln(x) \rightarrow du = \frac{1}{x}dx; dv = 1dx \rightarrow v = x$. Assim, teremos:

$\int \ln(x)dx = \int udv = uv - \int vdu = x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln(x) - x + C$

finalizando a resolução.

(b) Para a integração por partes, usaremos a seguinte substituição:
$u = x \rightarrow du = dx; dv = e^{3x}dx \rightarrow v = \frac{e^{3x}}{3}$. Assim, teremos:

$\int xe^{3x}dx = \int udv = uv - \int vdu = \frac{xe^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3}dx = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + C$

finalizando a resolução.

(c) Para a integração por partes, usaremos a seguinte substituição:
$u = x^2 \rightarrow du = 2xdx; dv = \sin(3x)dx \rightarrow v = -\frac{\cos(3x)}{3}$. Assim, teremos:

$\int x^2\sin(3x)dx = \int udv = uv - \int vdu = -\frac{x^2\cos(3x)}{3} - \int -\frac{2x\cos(3x)}{3}dx$

$= -\frac{x^2\cos(3x)}{3} + \frac{1}{3}\int 2x\cos(3x)dx$

Agora, teremos que aplicar uma nova integração por partes para resolver a nova integral, usando o seguinte:
$u = 2x \rightarrow du = 2dx; dv = \cos(3x)dx \rightarrow v = \frac{\sin(3x)}{3}$

$-\frac{x^2\cos(3x)}{3} + \frac{1}{3}\int 2x\cos(3x) = -\frac{x^2\cos(3x)}{3} + \frac{1}{3}[\frac{2x\sin(3x)}{3} - \int \frac{2\sin(3x)}{3}dx]$

$= -\frac{x^2\cos(3x)}{3} + \frac{1}{3}[\frac{2x\sin(3x)}{3} + \frac{2}{9}\cos(3x)] + C$

Então: $\int x^2\sin(3x)dx = -\frac{1}{3}x^2\cos(3x) + \frac{2}{27}(3x\sin(3x) + \cos(3x)) + C$

finalizando a resolução.

(d) Para a integração por partes, usaremos a seguinte substituição:
$u = \cos(x) \rightarrow du = -\sin(x)dx; dv = e^x dx \rightarrow v = e^x$. Assim, teremos:

$\int e^x\cos(x) = \int udv = uv - \int vdu = e^x\cos(x) - \int -e^x\sin(x)dx$

Agora, teremos que aplicar uma nova integração por partes para resolver a nova integral, usando o seguinte:
$u = \sin(x) \rightarrow du = \cos(x)dx; dv = e^x dx \rightarrow v = e^x$

$\int e^x\cos(x)dx = e^x\cos(x) + e^x\sin(x) - \int e^x\cos(x)dx$

Notemos que, após a segunda integração por partes, voltamos na integral inicial. Então, para chegar na resposta final basta passar a integral somando pro outro lado da igualdade e dividir os dois lados por 2:

$\int e^x \cos(x)dx = \frac{1}{2}(e^x \cos(x) + e^x \sin(x)) + C$

finalizando a resolução.

(e) Semelhante à letra d) apenas trocando o cosseno por seno.

(f) Semelhante à letra d). Note que a função é $f(x) = e^{-x} \sin(2x)$.

(g) Para a integração por partes, usaremos a seguinte substituição:
$u = \arctan(x) \to du = \frac{1}{x^2+1}dx; dv = 1dx \to v = x$. Assim, teremos:

$\int \arctan(x)dx = \int udv = uv - \int vdu = x\arctan(x) - \int \frac{x}{x^2+1}dx$

Para resolver a nova integral basta usar a seguinte mudança de variável: $u = x^2 + 1 \to du = 2xdx$. Assim, teremos:

$x\arctan(x) - \int \frac{1}{2}\frac{1}{u}du = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln|x^2 + 1| + C$

finalizando a resolução.

(h) Semelhante à letra g). Lembrando que: $\frac{d(\arcsin(x))}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

4. (a) Primeiro, usaremos a seguinte substituição: $u = x^2 \to du = 2xdx$. Assim teremos:

$$\int x\arcsin(x^2)dx = \frac{1}{2}\int \arcsin(u)du$$

Agora, basta fazer uma integração por partes como na letra g) e voltar para a variável x, chegando na seguinte resposta:

$$\int x\arcsin(x^2)dx = \frac{1}{2}x^2\arcsin\left(x^2\right) + \frac{1}{2}\sqrt{1 - x^4} + C$$

(b) Nesse item, aplicaremos a seguinte substituição: $u = 3 + x \to du = dx$. Disso, temos que $x + 1 = u - 2$. Então, reescrevendo, a integral fica:

$$\int \sqrt{x+3}(x+1)^2dx = \int u^{\frac{1}{2}}(u-2)^2du$$
$$= \int u^{\frac{1}{2}}(u^2 - 4u + 4)du = \int(u^{\frac{5}{2}} - 4u^{\frac{3}{2}} + 4u^{\frac{1}{2}})du$$
$$= \frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} - \frac{8}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$

Voltando para a variável original, teremos a resposta final:

$$\int \sqrt{x+3}(x+1)^2dx = \frac{2}{7}(x+3)^{\frac{7}{2}} - \frac{8}{5}(x+3)^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}} + C$$

finalizando a resolução.

(c) Nesse item, deve-se aplicar distributiva e depois fazer as integrais de polinômios:

$$\int(t + \frac{1}{t})(1 - \frac{1}{t^2})dt = \int(t - \frac{1}{t} + \frac{1}{t} - \frac{1}{t^3})dt = \int tdt - \int t^{-3}dt$$
$$= \frac{t^2}{2} - (-\frac{1}{2}t^{-2}) = \frac{1}{2}(t^2 + \frac{1}{t^2}) + C$$

finalizando a resolução.

(d) Semelhante ao exercício 3 - letra g). Lembrando que antes de aplicar a integral por partes, deve-se aplicar a substituição: $u = 2x \to du = 2dx$. Outro detalhe importante nesse item é lembrar que:

$$\frac{d(\arccos(x))}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(e) Semelhante à letra b).

(f) Nesse item, inicialmente, aplicaremos a seguinte substituição:
$u = \sin(x) \rightarrow du = \cos(x)dx$. Assim teremos:

$$\int \frac{\cos(x)}{5+\sin^2(x)}dx = \int \frac{1}{5+u^2}du$$

Agora, usaremos uma nova substituição: $u = \sqrt{5}v \rightarrow du = \sqrt{5}dv$. Assim, a integral fica:

$$\int \frac{\sqrt{5}}{5+(\sqrt{5}v)^2}dv = \sqrt{5}\int \frac{1}{5(1+v^2)}dv = \frac{\sqrt{5}}{5}\int \frac{1}{1+v^2}dv$$
$$= \frac{\sqrt{5}}{5}\arctan(v) + C$$

Por fim, devemos voltar para a variável inicial:

$$v = \frac{u}{\sqrt{5}} \text{ e } u = \sin(x)\text{, então: } v = \frac{\sin(x)}{\sqrt{5}}$$

Logo a resposta final é:

$$\int \frac{\cos(x)}{5+\sin^2(x)}dx = \frac{\sqrt{5}}{5}\arctan(\frac{\sin(x)}{\sqrt{5}}) + C$$

finalizando a resolução.

(g) Antes de aplicar qualquer substituição, vamos manipular a integral para deixar mais fácil a resolução:

$$\int \frac{\cos(x)}{2\sin^2(x)+3\cos^2(x)}dx = \int \frac{\cos(x)}{(3\sin^2(x)+3\cos^2(x))-\sin^2(x)}dx$$
$$= \int \frac{\cos(x)}{3(\sin^2(x)+\cos^2(x))-\sin^2(x)}dx = \int \frac{\cos(x)}{3-\sin^2(x)}dx$$

Agora, com a integral mais simples, aplicaremos a seguinte substituição: $u = \sin(x) \rightarrow du = \cos(x)dx$. Assim, teremos:

$$\int \frac{1}{3-u^2}du = \int \frac{1}{(\sqrt{3}-u)(\sqrt{3}+u)}du$$

Agora, para resolver a integral em que chegamos, temos que usar uma técnica de integração um pouco mais avançada, denominada integração por frações parciais. Essa técnica decompõe uma fração complicada em uma soma de novas frações, mais simples para integrar. Dá-se da seguinte forma:

$$\frac{1}{(\sqrt{3}-u)(\sqrt{3}+u)} = \frac{A}{(\sqrt{3}-u)} + \frac{B}{(\sqrt{3}+u)}$$

Para encontrar as constantes A e B, basta fazer o MMC das novas frações, somá-las e igualar os numeradores dessa nova soma e da fração anterior:

$$\frac{A}{(\sqrt{3}-u)} + \frac{B}{(\sqrt{3}+u)} = \frac{A(\sqrt{3}+u)+B(\sqrt{3}-u)}{(\sqrt{3}-u)(\sqrt{3}+u)} = \frac{1}{(\sqrt{3}-u)(\sqrt{3}+u)}$$
$$\sqrt{3}(A+B) + u(A-B) = 1 + 0u$$
$$\text{Polinômios iguais} \rightarrow \text{Coeficientes iguais}$$
$$A + B = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ e } A - B = 0 \rightarrow A = B = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Agora, sabendo os coeficientes A e B, podemos substituir nas frações parciais e depois integrar:

$$\frac{A}{(\sqrt{3}-u)} + \frac{B}{(\sqrt{3}+u)} = \frac{1}{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-u)} + \frac{1}{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+u)}$$
$$\int \frac{1}{3-u^2}du = \frac{1}{2\sqrt{3}}[\int \frac{1}{\sqrt{3}-u}du + \int \frac{1}{\sqrt{3}+u}du]$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}[-\ln(\sqrt{3}-u) + \ln(\sqrt{3}+u)] + C$$

Agora, voltando para a variável x teremos nossa resposta final:

$$\int \frac{\cos(x)}{2\sin^2(x)+3\cos^2(x)}dx = \frac{1}{2\sqrt{3}}[-\ln(\sqrt{3}-\sin(x)) + \ln(\sqrt{3}+\sin(x))] + C$$

finalizando a resolução.

(h) Nesse item, basta manipular a integral:

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = \int \frac{x^2+1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}dx$$
$$= \int 1dx + \int \frac{1}{1+x^2}dx = x + \arctan(x) + C$$

finalizando a resolução.

5. Basta aplicar as fórmulas nas integrais e fazer as substituições necessárias. Não vou resolver pois não são muito aplicáveis e não são o foco da lista. Qualquer dúvida sobre esta questão, podem me mandar por e-mail.

6. (a) Partindo do Teorema fundamental do cálculo podemos afirmar que:

$$\int f''(x)dx = f'(x). \text{ Assim, temos:}$$
$$f'(x) = \int 6x dx = 3x^2 + C$$

Como estudado, sabemos que a equaçaõ de uma reta tangente a uma função $f(x)$ em um ponto $P = (x_p, y_p)$ é dada por:

$$y = f'(x_p)(x - x_p) + y_p$$

Logo, substituindo $f'(x_p) = 3 + C$ e o ponto $(1, 3)$ e igualando à equação da reta tangente dada no enunciado, temos que:

$$y = (3 + C)(x - 1) + 3 = x + 2$$
$$3x - 3 + Cx - C + 3 = x + 2$$
$$(3 + C)x - C = x + 2$$
$$C = -2$$

Assim, conclui-se que $f'(x) = 3x^2 - 2$. Agora que conhecemos $f'(x)$, basta integrar novamente para achar $f(x)$:

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int 3x^2 - 2dx$$
$$f(x) = x^3 - 2x + C$$

Para encontrar a constante, devemos lembrar que o ponto $(1, 3)$ pertence a essa função. Então, podemos afirmar que:

$$f(1) = 3 \to 1 - 2 + C = 3$$
$$C = 4$$

Dessa forma, conclui-se que: $f(x) = x^3 - 2x + 4$, finalizando a resolução.

(b) Semelhante à letra a).

OBS: Se tiverem qualquer dúvida sobre as listas ou sobre o conteúdo podem me contactar por e-mail (pascualotej@usp.br).