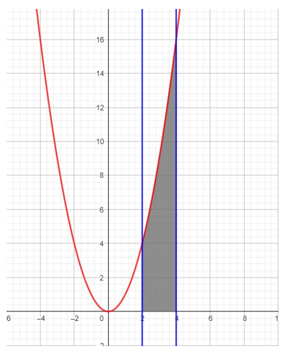
3.a Lista - SMA354-Cálculo II - Exercícios resolvidos selecionados

1.o semestre de 2020

1. (a) Inicialmente, vamos analisar a região do plano a que se refere o item. A parábola $y = x^2$ está em vermelho e as retas $x = 2$ e $x = 4$ estão em azul. O limite inferior da região é o eixo x $(y = 0)$:

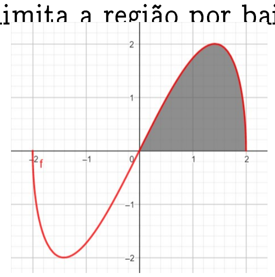


A área da região sombreada pode ser calculada com:

$$A = \int_2^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_2^4 = \frac{64}{3} - \frac{8}{3} \to A = \frac{56}{3}\text{u.a.}$$

finalizando a resolução.

(b) Inicialmente, vamos analisar a região do plano a que se refere o item. A função $x\sqrt{4-x^2}$ está em vermelho. O eixo x limita a região por baixo:



A área da região sombreada pode ser calculada com:

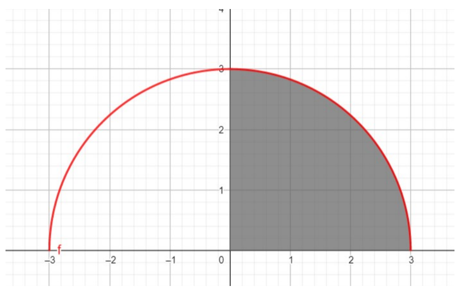
$$A = \int_0^2 x\sqrt{4-x^2}dx \to \text{aplicar substituição}$$

$u = 4 - x^2$, logo $du = -2dx$ e os limites, para $x = 0$, logo $u = 4$ e para $x = 2$, teremos $u = 0$

$$A = -\frac{1}{2}\int_4^0 u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2}\int_0^4 u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2}\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^4 = \frac{4^{\frac{3}{2}}}{3} - 0, \text{ logo } A = \frac{8}{3}\text{u.a.}$$

finalizando a resolução.

(c) Inicialmente, vamos analisar a região do plano a que se refere o item. A região é limitada pela função $\sqrt{9-x^2}$ e pelos eixos coordenados, ficando dessa forma:



A área da região sombreada pode ser calculada com:

$$A = \int_0^3 \sqrt{9-x^2}dx \longrightarrow \text{substituição trigonométrica}$$

$$x = 3\sin(\theta), \text{ logo } dx = 3\cos(\theta)d\theta \text{ e os limites:}$$

$$\text{para } x = 0, \text{ teremos } \theta = \arcsin(0) = 0; \text{ e para } x = 3, \text{ teremos } \theta = \arcsin(1) = \pi/2$$

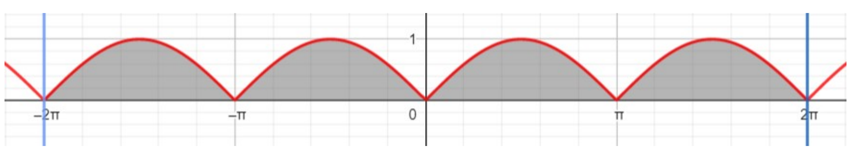
$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos(\theta)\sqrt{9(1-\sin^2(\theta))}d\theta = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)3\sqrt{\cos^2(\theta)}d\theta$$

$$= 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta)d\theta = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1+\cos(2\theta))d\theta = \frac{9}{2}(\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2})\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{9}{2}(\frac{\pi}{2} + 0 - 0 - 0), \text{ logo } A = \frac{9\pi}{4}u.a.$$

finalizando a resolução.

(d) Inicialmente, vamos analisar a região do plano a que se refere o item:

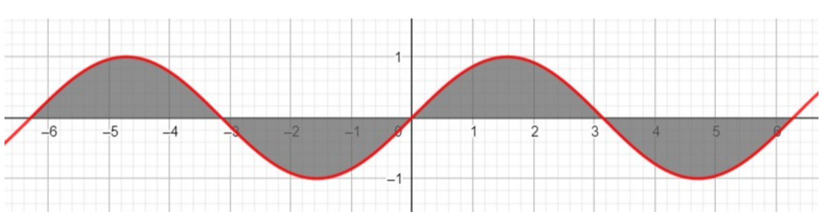


Na figura, nota-se que a região é dividida em 4 partes iguais. Então, para calcular a área total, podemos calcular a área da região de 0 a π e multiplicar por 4. Da seguinte forma:

$$A = 4[\int_0^{\pi} \sin(x)dx] = 4[-\cos(x)]\Bigg|_0^{\pi}, \text{ logo } A = 8u.a.$$

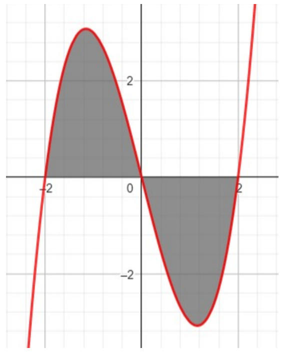
finalizando a resolução.

(e) Inicialmente, vamos analisar a região do plano a que se refere o item:



Nota-se que, assim como no item anterior a região é dividida em 4 partes iguais. Além disso, as regiões tem área iguais às regiões do item anterior. Então, aplicando a mesma lógica do item d). Portanto, a área da região é 8 $u.a.$, finalizando a resolução.

(f) Inicialmente, vamos analisar a região do plano a que se refere o item:

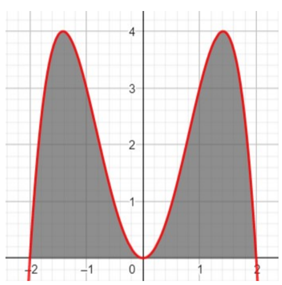


Como a função apresenta partes positivas e partes negativas, para calcular a área, devemos fazer a integral do módulo de $f(x)$, dividindo a integral em 2 intervalos. Ficará da seguinte forma:

$$A = \int_{-2}^{2} |x^3 - 4x| dx = \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x) dx + \int_{0}^{2} (4x - x^3) dx$$
$$= (\frac{x^4}{4} - 2x^2)\Big|_{-2}^{0} + (2x^2 - \frac{x^4}{4})\Big|_{0}^{2} = -4 + 8 - 4 + 8$$
$$A = 8u.a.$$

finalizando a resolução.

(g) Inicialmente, vamos analisar a região do plano a que se refere o item:



A função é positiva para todo $x \epsilon (-2, 2)$ então não precisa do módulo na integral. A área da região sombreada pode ser calculada da seguinte forma:

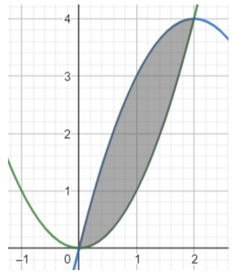
$$A = \int_{-2}^{2} (4x^2 - x^4) dx = (\frac{4x^3}{3} - \frac{x^5}{5})\Big|_{-2}^{2}$$
$$= \frac{32+32}{3} - \frac{32+32}{5}, \text{ logo } A = \frac{128}{15} u.a.$$

finalizando a resolução.

2. (a) Primeiro, devemos achar a intersecção dos gráficos das funções:

$$x^2 = 4x - x^2 \rightarrow x_1 = 0 \text{ e } x_2 = 2$$

Agora, desenhando o gráfico poderemos ter uma ideia melhor sobre a região ($y = x^2$ em verde e $y = 4x - x^2$ em azul):



Como visto no gráfico, a função $y = 4x - x^2$ é maior que $y = x^2$ para todo $x \epsilon (0, 2)$. Então, podemos calcular a área entre as duas funções da seguinte forma:

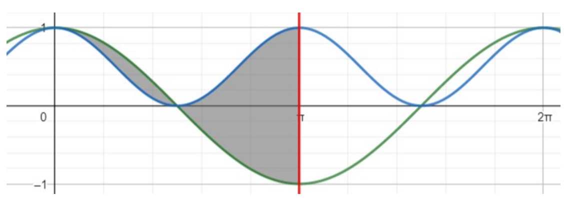
$$A = \int_0^2 (4x - x^2) - x^2 dx = \left(-\frac{2x^3}{3} + 2x^2\right)\Bigg|_0^2$$
$$A = -\frac{16}{3} + 8, \text{ logo } A = \frac{8}{3} u.a.$$

finalizando a resolução.

(b) Primeiro, devemos achar a intersecção dos gráficos das funções no intervalo determinado (de 0 até π):

$$\cos(x) = \cos^2(x), \text{ teremos } x_1 = 0, x_2 = \frac{\pi}{2}$$

Além disso, devemos notar que, entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ $\cos(x) > \cos^2(x)$ e no resto do intervalo ocorre o contrário. Observemos o gráfico:



Assim, a área da região sombreada pode ser calculada da seguinte forma:

$$A = \int_0^\pi |\cos^2(x) - \cos(x)| dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x) - \cos^2(x)) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos^2(x) - \cos(x)) dx$$
$$= \left(\sin(x) - \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} - \sin(x)\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}, \text{ logo } A = 2u.a.$$

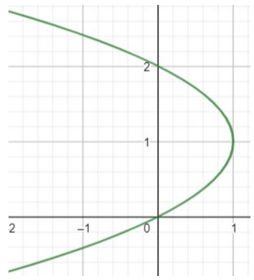
finalizando a resolução.

(c) Semelhante ao item a) da questão 1.

3. O item apresenta uma função $x(y) = 2y - y^2$. Analisemos o gráfico:

A região desejada está entre o eixo y e a parábola. Para calcular essa área, é mais prático fazermos uma integral em dy, da seguinte forma:

$$A = \int_0^2 2y - y^2 dy = \left(y^2 - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = 4 - \frac{8}{3}, \text{ logo } A = \frac{4}{3} u.a.$$



finalizando a resolução.

4. Primeiro, devemos achar intersecções das funções no intervalo de 0 a $\frac{\pi}{2}$:

$$\sin(x) = \sin(2x), \text{ teremos } x_1 = 0, x_2 = \frac{\pi}{3}$$

Além disso, devemos notar que entre 0 e $\frac{\pi}{3}$ temos $\sin(2x) > \sin(x)$ e no resto do intervalo temos o contrário. Observemos o gráfico ($\sin(2x)$ em azul e $\sin(x)$ em verde):

Assim, a área da região sombreada pode ser calculada da seguinte forma:

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(2x) - \sin(x)| dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(2x) - \sin(x) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) - \sin(2x) dx$$
$$= \left(-\frac{\cos(2x)}{2} + \cos(x)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} + \left(\frac{\cos(2x)}{2} - \cos(x)\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}, \text{ logo } A = \frac{1}{2}u.a.$$

finalizando a resolução.

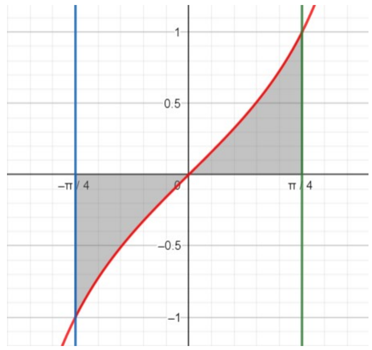
5. (a) Semelhante ao item b) da questão 1
   (b) Inicialmente, vamos analisar a região entre o gráfico da função $y = \tan(x)$ e o eixo x, com x de $-\frac{\pi}{4}$ até $\frac{\pi}{4}$:
   Como podemos observar, a região é dividida em duas partes iguais. Portanto a área total é igual a 2 vezes a área da região de 0 até $\frac{\pi}{4}$. Calcularemos da seguinte forma:

$$A = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx$$

$$\text{substituição: } u = \cos(x), \text{ teremos } du = -\sin(x)dx$$

$$\text{e os limites: para } x = 0, \text{ teremos } u = 1 \text{ e para } x = \frac{\pi}{4}, \text{ teremos } u = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$A = 2\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} -\frac{1}{u} du = -2\ln(u)\Bigg|_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}, \text{ logo } A = -2\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)u.a.$$



finalizando a resolução.

6. Para essa questão, como as regiões pedidas estarão sempre ACIMA do eixo x, então é possível fazê-la só integrando as funções nos intervalos determinados.

   (a) A área pode ser calculada da seguinte forma:

$$A = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 2 - x dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + \left.(2x - \frac{x^2}{2})\right|_1^2$$
$$A = \frac{1}{3} + 4 - 2 - 2 + \frac{1}{2}, \text{ logo } = \frac{5}{6} u.a.$$

   finalizando a resolução.

   (b) A área pode ser calculada da seguinte forma:

$$A = \int_0^1 1 - x^2 dx + \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4) dx = \left.(x - \frac{x^3}{3})\right|_0^1 + \left.(-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x)\right|_1^4$$
$$A = \frac{2}{3} + \frac{9}{2} \rightarrow A = \frac{31}{6} u.a.$$

   finalizando a resolução.

7. Nessa questão, a maioria dos itens parecem com outros feitos anteriormente. Então, não há necessidade de fazer novamente.

   (a) Semelhante ao item a) da questão 1.

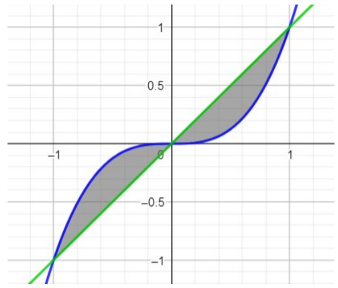
   (b) Semelhante ao item a) da questão 1.

   (c) Semelhante ao item b) da questão 1, só que nesse item a região está abaixo do eixo x.

   (d) Semelhante ao item g) da questão 1.

   (e) Praticamente igual ao item d) da questão 1, mudando só o intervalo.

(f) Inicialmente, analisaremos os gráficos das funções:



A região é dividida em 2 partes de área igual. Assim, a área total é igual a 2 vezes a área da região com x entre 0 e 1. Portanto, temos:

$$A = 2\int_0^1 (x - x^3)\,dx = 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1,\ \text{logo } A = \frac{1}{2}\text{u.a.}$$