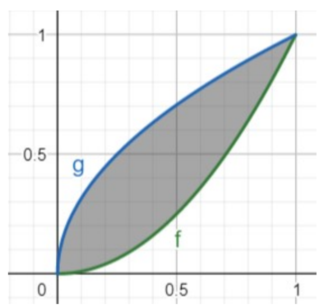
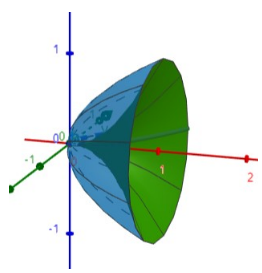
4.a Lista - SMA0354 - Cálculo II - Exercícios resolvidos selecionados

1.o semestre de 2020

1. Primeiro, devemos analisar a região limitada R, que deve ser revolucionada em torno do eixo Ox. a representação geométrica do gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) \doteq x^2$, para $x \in \mathbb{R}$, está em verde e da função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) \doteq \sqrt{x}$, para $x \in [0\,,\infty)$ em azul:



A representação geométrica do gráfico do sólido acima é dado pela figura abaixo.



Para calcular o volume desse sólido, usaremos o Teorema do método das fatias (4.3.1 nas notas de aula). E como a região é formada por duas funções e $g(x) > f(x)$ para todo $x \in [0\,,1]$, e a função $A : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ pode ser encontrada da seguinte forma:

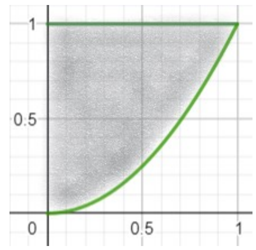
$$A(x) = \pi[g^2(x) - f^2(x)] = \pi\left[(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2\right], \text{ logo: } A(x) = \pi(x - x^4), \text{ para } x \in [0\,,1], \text{ assim:}$$

$$V = \int_a^b A(x)dx = \pi\int_0^1 (x - x^4)dx = \pi\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1$$

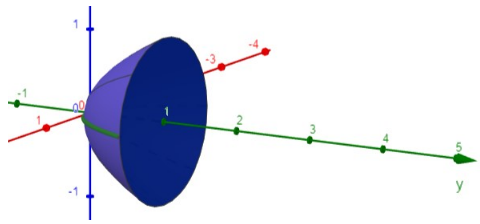
$$V = \pi\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{5}\right), \text{ logo } V = \tfrac{3\pi}{10}\ u.v.$$

finalizando a resolução.

2. Primeiro, devemos analisar a região limitada R, que deve ser revolucionada em torno do eixo Oy. A função $f : [0\,,1] \to \mathbb{R}$, dada por $x = f(y) \doteq \sqrt{y}$ para $y \in [0\,,1]$:



A representação geométrica do gráfico do sólido acima é dado pela figura abaixo.

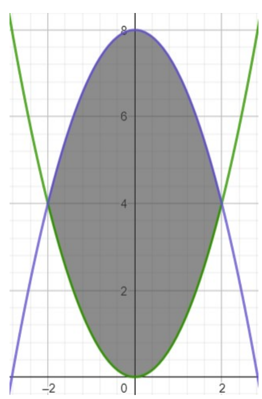


Para calcular o volume desse sólido, usaremos o Teorema do método das fatias (4.3.1 nas notas de aula), lembrando que, como a revolução foi em torno do eixo Oy, devemos integrar a função área A:

$$V = \int_a^b A(y)dy = \int_0^1 \pi f^2(y)dy = \pi \int_0^1 (\sqrt{y})^2\, dy$$
$$V = \pi \int_0^1 y dy = \pi \frac{x^2}{2}\bigg|_0^1, \text{ ou seja, } V = \frac{\pi}{2}\, u.v.$$

finalizando a resolução.

3. Nesse item, o enunciado nos fornece a região que compreende os círculos obtido da intersecção do sólido com plano xOy. Neste caso a função $f : [-2\,,2] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) \doteq x^2$, para $x \in [-2\,,2]$, cuja representação geométrica que está verde e a a função $g : [-2\,,2] \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) \doteq 8 - x^2$, para $x \in [-2\,,2]$, que está em azul. Note que $g(x) > f(x)$ para $x \in [-2\,,2]$:



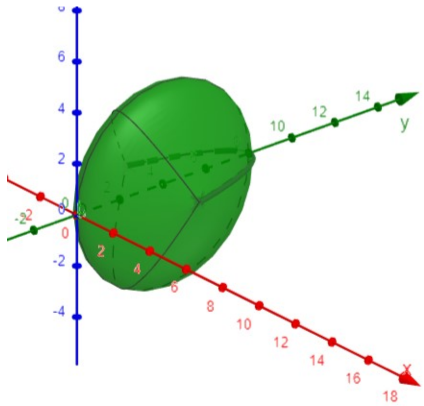
Dessa forma, podemos descobrir facilmente a expressão para a função área A, pois como as intersecções geram círculos temos que, para cada $x \in [-2\,,2]$:

$$A(x) = \pi \left(\frac{\text{diam.}}{2}\right)^2 = \pi \left(\frac{8 - x^2 - x^2}{2}\right)^2 = \pi \left(4 - x^2\right)^2, \text{ ou seja, } A(x) = \pi(16 - 8x^2 + x^4)$$

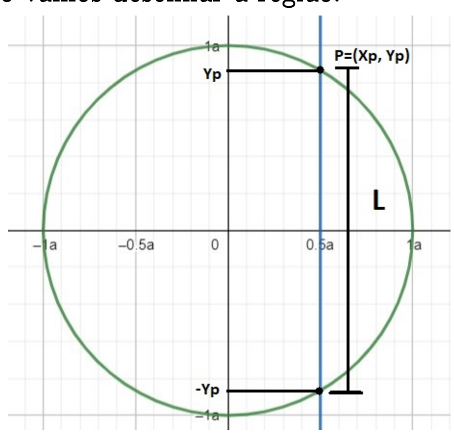
Assim, conhecendo a função área A, podemos calcular o volume do sólido pelo Teorema do método das fatias:

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_{-2}^{2} \pi\left(16 - 8x^2 + x^4\right)dx = \pi\left(16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-2}^{2}, \text{ logo } V = \frac{512\pi}{15}\,u.v.$$

finalizando a resolução. A representação geométrica do gráfico do sólido acima é dado pela figura abaixo.



4. Nesse item o enunciado nos diz que a intersecção do sólido com plano xOy, são QUADRADOS com um lado sobre o círculo $\{(x\,,y)\ :\ x^2 + y^2 \leq a^2\}$. Dessa forma, sabemos que a função área A será a área de um quadrado (cujo valor é L^2, onde L é o valor do lado do quadrado). Para calcular o lado do quadrado vamos desenhar a região:



De acordo com a figura acima, podemos ver que, para $x \in [-a\,,a]$, o lado $L = L(x)$ do quadrado é:

$$L(x) = 2\,y_P = 2\sqrt{a^2 - x^2}\,.$$

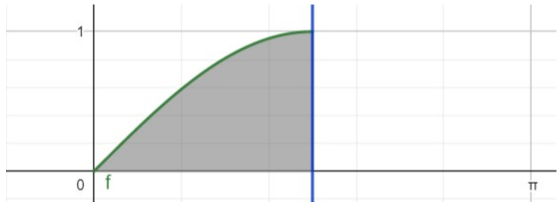
Com isso, podemos calcular a área A e usando o Teorema do método das fatias calcular o volume do sólido:

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_{-a}^{a} L^2 dx = \int_{-a}^{a} 4(a^2 - x^2)dx = 4\left(xa^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-a}^{a}$$

$$V = 4\left(a^3 - \frac{a^3}{3} + a^3 - \frac{a^3}{3}\right), \text{ ou seja, } V = \frac{16a^3}{3}u.v.$$

finalizando a resolução.

5. Esse item é semelhante ao anterior. A região R referida tem como representação geométrica a figura abaixo:



Como o enunciado nos diz que as intersecções com planos perpendiculares ao eixo x, gera triângulos equiláteros, com um lado sobre a base, sabemos que para um determinada seção reta $x = x_o$, o lado do triângulo será $L = \sin(x_o)$, para cada $x_o \in [0\,,\frac{\pi}{2}]$. Assim, podemos calcular a função área A, que será a área de um triângulo equilátero cujo valor do lado é L. Com isso poderemos calcular o volume do sólido com o Teorema do método das fatias:

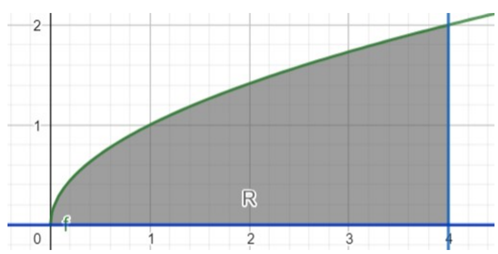
$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{L^2\sqrt{3}}{4} dx = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)dx$$

A integral de $\sin^2(x)$ entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ já foi calculada em outra lista e seu valor é $\frac{\pi}{4}$.

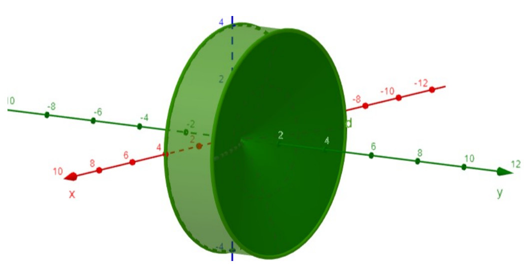
$$\text{Portanto: } V = \frac{\pi\sqrt{3}}{16} \text{ u.v.}$$

finalizando a resolução.

6. (a) Inicialmente, esboçando-se a região R, com a representação geométrica da função $f : [0\,,4] \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) \doteq \sqrt{x}$, para $x \in [0\,,4]$, em verde e das retas $y = 0$ e $x = 4$ em azul, teremos:



Ao fazer a revolução da mesma em torno do eixo Oy obteremos seguinte sólido:



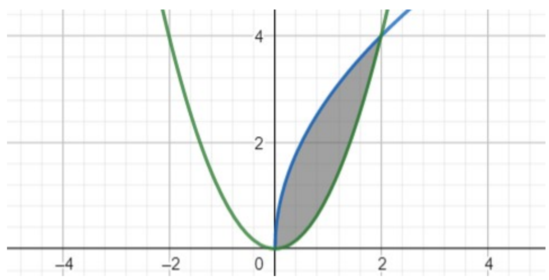
Para calcular seu volume, usaremos o Teorema do método das cascas cilíndricas (4.5.1 nas notas de aula). O eixo de rotação é a reta $x = 0$ (o eixo Oy). Além disso, o sólido foi gerado pela região limitada e delimitada pelas representações geométricas dos gráficos das funções $f, g : [0, 4] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) \doteq \sqrt{x}$ e $g(x) \doteq 0$, para $x \in [0, 4]$. Portanto, podemos encontrar a expressão da função área A e calcular o volume usando o teorema:

$$A(x) = 2\pi(x - L)[f(x) - g(x)] = 2\pi x\sqrt{x}, \text{ isto é, } A(x) = 2\pi x^{\frac{3}{2}}$$

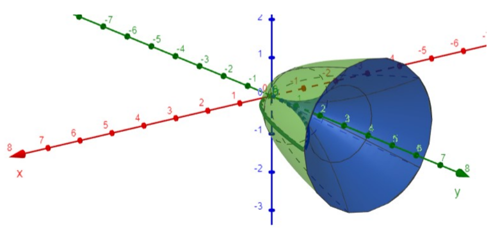
$$\text{logo, } V = \int_a^b A(x)dx = \int_0^4 2\pi x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{4\pi}{5} x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^4, \text{ ou seja, } V = \frac{128\pi}{5} u.v.$$

finalizando a resolução.

(b) Inicialmente, vamos esboçar a região R, com a representação geométrica da função $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) \doteq x^2$, para $x \in [0, 2]$, em verde e a representação geométrica da função $g : [0, 2] \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) \doteq \sqrt{8x}$, para $x \in [0, 2]$, em azul, lembrando que as intersecções entre as funções ocorrem para $x = 0$ e $x = 2$:



Ao fazer a revolução da mesma em torno do eixo Oy, teríemos o seguinte sólido:



Para calcular seu volume, usaremos o Teorema do método das cascas cilíndricas (4.5.1 nas notas de aula). O eixo de rotação é a reta $x = 0$ (ou seja, o eixo Oy), logo $L = 0$. Além disso, o sólido foi gerado pela região limitada e delimitada pelas representações geométricas dos gráficos das funções f e g, e podemos observar que $g(x) \geq f(x)$ para $x \in [0, 2]$. Portanto, podemos encontrar a expressão da função área A e calcular o volume usando o teorema das casas cilíndricas:

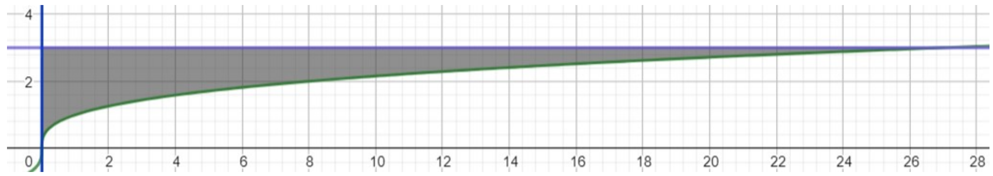
$$A(x) = 2\pi(x - L)|f(x) - g(x)| = 2\pi x\left(\sqrt{8x} - x^2\right), \text{ ou seja, } A(x) = 2\pi\left(2\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}} - x^3\right)$$

$$V = \int_a^b A(x)dx = 2\pi\left[2\sqrt{2}\int_0^2 x^{\frac{3}{2}} dx - \int_0^2 x^3 dx\right] = 2\pi\left[\frac{4\sqrt{2}}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^2 - \frac{x^4}{4}\Big|_0^2\right]$$

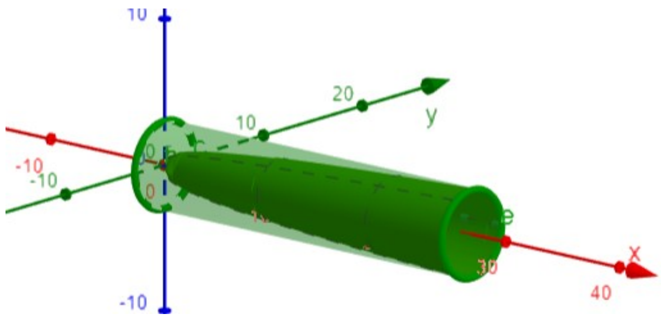
$$V = 2\pi\left[\frac{32}{5} - 4\right], \text{ ou seja, } V = \frac{24\pi}{5} u.v.$$

finalizando a resolução.

(c) Inicialmente, esboçando a região R: a representação geométrica da função $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$, dada por $f(y) = y^3$, para $y \in [0, 3]$ é dada em verde e das retas $y = 3$ e $x = 0$ em azul, lembrando que a intersecção ocorre para x=27, teremos:



Ao fazer a revolução da mesma em torno do eixo Ox teríamos o seguinte sólido:



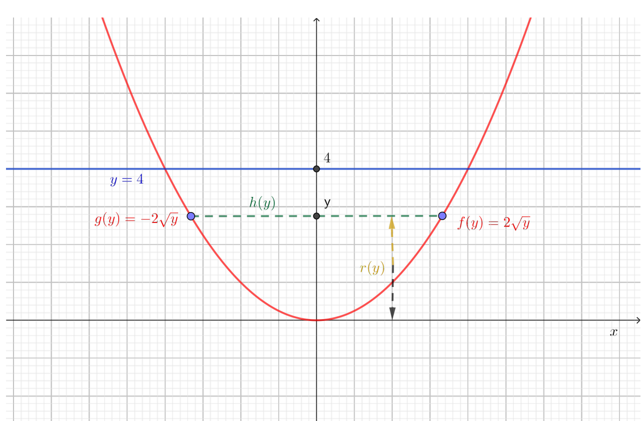
Para calcular seu volume, usaremos o Teorema do método das cascas cilíndricas (4.5.1 nas notas de aula). O eixo de rotação foi a reta $y = 0$ (eixo Ox), logo $L = 0$. Além disso, o sólido foi gerado pela região delimitada pelas representações geométricas das funções f e g, e podemos observar que $f(y) \geq g(y)$ para $yin[0,3]$. Portanto, podemos encontrar a expressão da função área A) e calcular o volume usando o teorema acima:

$$A(y) = 2\pi(y - L)|f(y) - g(y)| = 2\pi y y^3, \text{ ou seja, } A(y) = 2\pi y^4$$

$$V = \int_a^b A(y)dy = \int_0^3 2\pi y^4 dy = 2\pi \frac{y^5}{5}\bigg|_0^3, \text{ ou seja, } V = \frac{486\pi}{5} \text{ u.v.}$$

finalizando a resolução.

(d) Inicialmente, esboçando a região R: a representação geométrica do gráfico da função $f, g : [0,4] \to \mathbb{R}$, dada por $g(y) \doteq -2\sqrt{y}$ e $f(y) \doteq 2\sqrt{y}$, para $y \in [0,4]$, das retas $y = 4$ e $x = 0$.

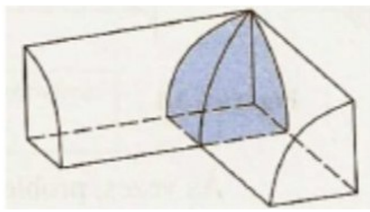


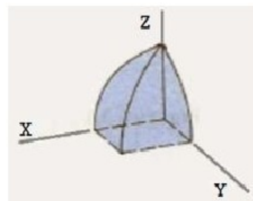
Para calcular seu volume, usaremos o Teorema do método das cascas cilíndricas (4.5.1 nas notas de aula). O eixo de rotação foi a reta $y = 0$ (eixo Ox), logo $L = 0$. Além disso, o sólido foi gerado pela região delimitada pelas representações geométricas das funções f, g e pela reta $y = 4$.

Portanto, podemos encontrar a expressão da função área $A = A9y)$ e calcular o volume usando o teorema acima:

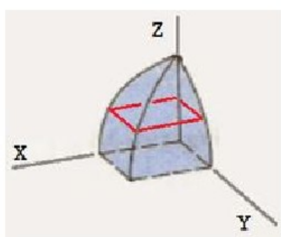
$$A(y) = 2\pi(y-L)|f(y)-g(y)| = 2\pi y\,[2\sqrt{y} - (-2\sqrt{y})],\ \text{ou seja},\ A(y) = 8\pi y^{\frac{3}{2}},\ \text{para}$$
$y \in [0\,,4]$, logo
$$V = \int_a^b A(y)dy = \int_0^4 8\pi y^{\frac{3}{2}}\,dy = \frac{16}{5}\pi y^{\frac{5}{2}}\Big|_0^4 \frac{512\pi}{5},\ \text{ou seja},\ V = \frac{512\pi}{5}\,u.v.$$
finalizando a resolução.

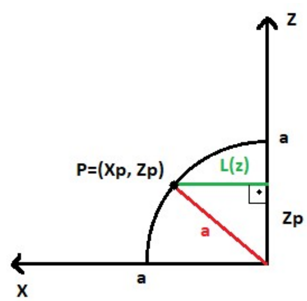
7. Como os cilindros tem eixos ortogonais e raios iguais a a, podemos dizer que o sólido gerado terá uma parte igual em cada octante. Ou seja, podemos calcular o volume de uma dessas partes e multiplicar por 8 para achar o volume total. Uma dessas partes, no primeiro octante, tem representação geométrica dada pela figura abaixo:





Se analisarmos as seções transversais geradas pela intersecção do sólido com planos perpendiculares ao eixo Oz, veremos que elas formam quadrados de lado L, sendo a base o quadrado com maior lado $L = a$. Na figura abaixo, a imagem à esquerda mostra uma das seções e a direita no plano sua projeção ortogonal no plano xOz, para podermos calcular $L(z)$:





Como podemos observar, a figura acima à da direita, forma um triângulo retângulo. Então, para cada $z \in [0\,,a]$, podemos descobrir o valor $L(z)$ usando teorema de Pitágoras, e depois descobrimos a expressão da área $A(z)$ que será igual a L^2:

$$a^2 = [L(z)]^2 + z^2,\ \text{ou seja},\ A(z) = a^2 - z^2.$$

Agora, usando o teorema do método das fatias, podemos calcular o volume do sólido, lembrando que a figura que estamos calculando o corresponde a um oitavo do volume total.

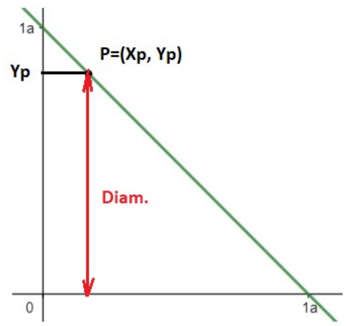
Assim teremos:

$$V_{Total} = 8\int_a^b A(z)dz = 8\int_0^a a^2 - z^2 dz = 8\left(za^2 - \frac{z^3}{3}\right)\Big|_0^a$$
$$\text{ou ainda },\ V_T = 8(a^3 - \frac{a^3}{3}),\text{ou seja},V_T = \frac{16a^3}{3}u.v.$$

finalizando a resolução.

8. Nesse item o enunciado nos diz que a base do sólido é um triângulo isósceles e que as intersecções do sólido com planos perpendiculares a altura relativa a um dos lados do triângulo são SEMICÍRCULOS.

   Logo, os diâmetros desses semicírculos serão paralelos a um dos lados da base. A figura abaixo nos permite visualizar melhor a situação descrita acima:



   Nessa figura, os lados iguais do triângulo estão sobre os eixos coordenados, e a hipotenusa está sobre a reta $y = a - x$.

   Podemos observar que o diâmetro dos semicírculos para um plano de corte que passa por $P = (x_p\,, y_p)$ é igual a y_p.

   Portanto, para cada $x \in [0\,, a]$, podemos calcular a área $A(x)$ e depois usar o Teorema do método das fatias para achar o volume:

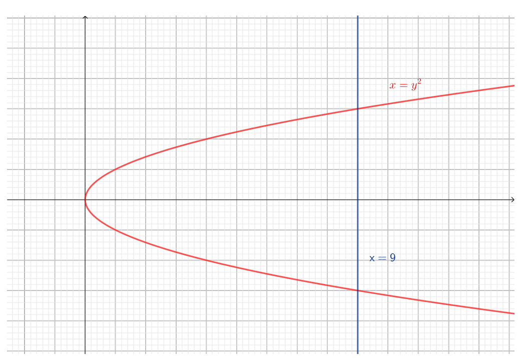
$$\text{raio} = \frac{\text{diam.}}{2} = \frac{f(x)}{2} = \frac{a-x}{2}, \text{ logo, } A(x) = \frac{\pi(\text{raio})^2}{2} = \frac{\pi(a-x)^2}{8}, \text{ logo } A(x) = \pi\frac{a^2-2ax+x^2}{8}$$

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_0^a \pi\frac{a^2-2ax+x^2}{8}dx = \frac{\pi}{8}\left(xa^2 - ax^2 + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a,$$

$$\text{ou seja, } V = \frac{\pi a^3}{24}\text{u.v.}$$

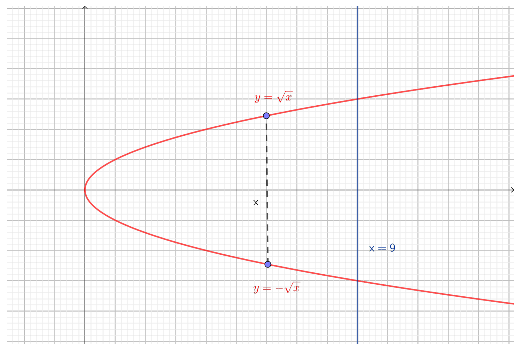
   finalizando a resolução.

9. Notemos que a região limitada R delimitada pelas representações geométricas dos gráficos das funções $f\,, g : [0\,, 9] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) \doteq \sqrt{x}$, $g(x) \doteq -\sqrt{x}$, para $x \in [0\,, 9]$ e pela reta$x = 9$ e dada pela figura abaixo.



(a)

A seção reta para cada $x \in [0,9]$, relativamente ao eixo Ox, é um quadrado. A figura abaixo nos mostra, para cada $x \in [0,9]$ o lado do quadrado descrito acima.



Logo para cada $x \in [0,9]$ a área da seção reta em x, denotada por $A(x)$ (é um quadrado com lado dado pela linha pontilhada na figura acima), cujo lado é

$$L(x) \doteq \sqrt{x} - (-\sqrt{x}) = 2\sqrt{x}, \tag{1}$$

será dada por

$$A(x) \doteq L^2(x) \overset{(1)}{=} (2\sqrt{x})^2 = 4x. \tag{2}$$

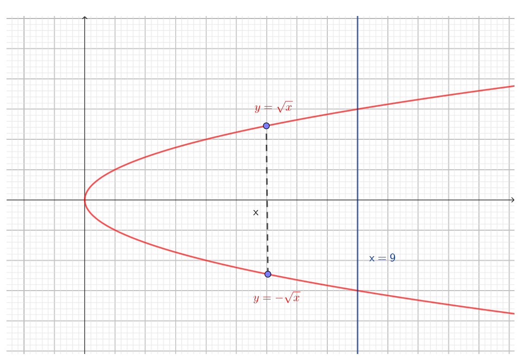
Como a função $A : [0,9] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[0,9]$, pelo método das fatias temos que o volume do sólido será

$$V = \int_a^b A(x)\, dx \overset{(1)}{=} \int_0^9 4x\, dx = 2x^2 \Big|_{x=0}^{x=9} = 182\, u.v.,$$

finalizando a resolução .

(b)

A seção reta para cada $x \in [0,9]$, relativamente ao eixo Ox, é um retângulo de altura fixa igual a 2. A figura abaixo nos mostra, para cada $x \in [0,9]$ o lado do retângulo descrito acima.



Logo para cada $x \in [0,9]$ a área da seção reta em x, denotada por $A(x)$ (é um retângulo com lado dado pela linha pontilhada na figura acima e altura igual a 2), cujo lado da base é

$$L(x) \doteq \sqrt{x} - (-\sqrt{x}) = 2\sqrt{x}, \tag{3}$$

será dada por

$$A(x) \doteq 2\,L(x) \overset{(3)}{=} 4\,\sqrt{x} = 2\,x^{\frac{1}{2}}\,. \tag{4}$$

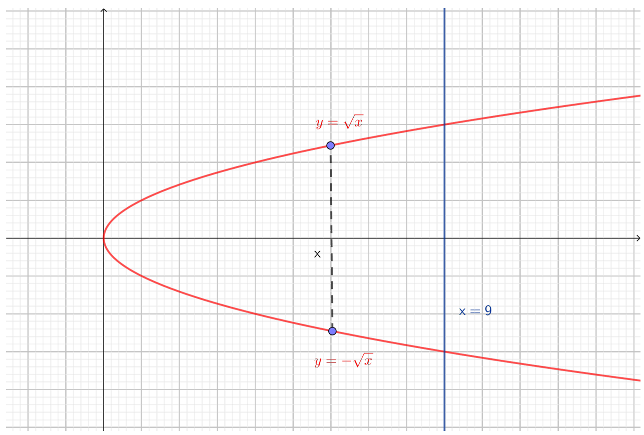
Como a função $A : [0\,,9] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $[0\,,9]$, pelo método das fatias temos que o volume do sólido será

$$V = \int_a^b A(x)\;dx \overset{(4)}{=} \int_0^9 2\,x^{\frac{1}{2}}\;dx = \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}\,\Big|_{x=0}^{x=9} = 18\,u.v.\,,$$

finalizando a resolução.

(c)

A seção reta para cada $x \in [0\,,9]$, relativamente ao eixo Ox, é um semi-círculo. A figura abaixo nos mostra, para cada $x \in [0\,,9]$ o diâmetro do semi-círculo descrito acima.



Logo para cada $x \in [0\,,9]$ a área da seção reta em x, denotada por $A(x)$, será do semi-círculo cujo diâmetro é a linha pontilhada na figura acima.

Notemos que o raio desse semi-círculo será metade do seu diâmetro, ou seja:

$$r(x) \doteq \frac{2\sqrt{x}}{2} = x^{\frac{1}{2}}\,. \tag{5}$$

Logo

$$A(x) \doteq \frac{\pi\,r^2(x)}{2} \overset{(5)}{=} \frac{\pi\,x}{2}\,. \tag{6}$$

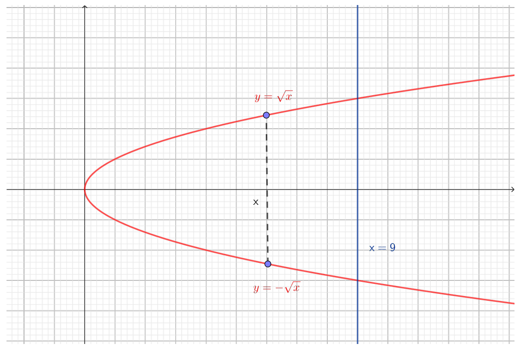
Como a função $A : [0\,,9] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $[0\,,9]$, pelo método das fatias temos que o volume do sólido será

$$V = \int_a^b A(x)\;dx \overset{(6)}{=} \int_0^9 \frac{\pi\,x}{2}\;dx = \frac{\pi}{4}\,x^2\,\Big|_{x=0}^{x=9} = \frac{81\,\pi}{4}\,u.v.\,,$$

finalizando a resolução.

(d)

A seção reta para cada $x \in [0\,,9]$, relativamente ao eixo Ox, é um quarto de círculo. A figura abaixo nos mostra, para cada $x \in [0\,,9]$ o raio do quarto de círculo descrito acima.



Logo para cada $x \in [0\,,9]$ a área da seção reta em x, denotada por $A(x)$, será do quarto de círculo cujo raio é a linha pontilhada na figura acima.

Notemos que o raio do quarto de círculo será

$$r(x) \doteq 2\sqrt{x}\,. \tag{7}$$

Logo

$$A(x) \doteq \frac{\pi\, r^2(x)}{4} \stackrel{(7)}{=} \pi\, x\,. \tag{8}$$

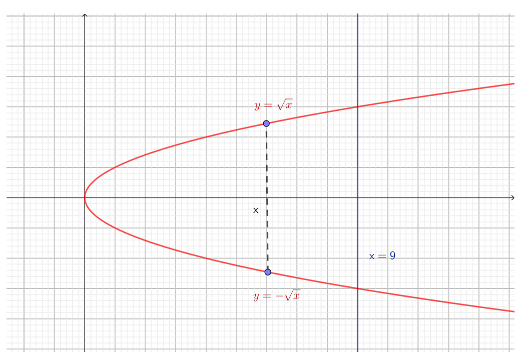
Como a função $A : [0\,,9] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[0\,,9]$, pelo método das fatias temos que o volume do sólido será

$$V = \int_a^b A(x)\, dx \stackrel{(6)}{=} \int_0^9 \pi\, x\, dx = \pi\, x^2 \Big|_{x=0}^{x=9} = 81\, \pi\, u.v.\,,$$

finalizando a resolução.

(e)

A seção retas para cada $x \in [0\,,9]$, relativamente ao eixo Ox, é um triângulo equilátero. A figura abaixo nos mostra, para cada $x \in [0\,,9]$, o lado do triângulo equilátero, descrito acima.



Logo para cada $x \in [0\,,9]$ a área da seção reta em x, denotada por $A(x)$, será de um triângulo equilátero, cujo lado é a linha pontilhada na figura acima.

Notemos que o lado do triângulo equilátero será

$$L(x) \doteq 2\sqrt{x}\,. \tag{9}$$

$$\text{sua altura (exercício) será} \quad h(x) \doteq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\,\sqrt{x} = \sqrt{3}\,\sqrt{x} \tag{10}$$

Logo

$$A(x) \doteq \frac{L(x)\,h(x)}{2} \overset{(9)\text{ e }(10)}{=} \frac{(2\sqrt{x})(\sqrt{3}\,\sqrt{x})}{2} = \sqrt{3}\,x\,. \tag{11}$$

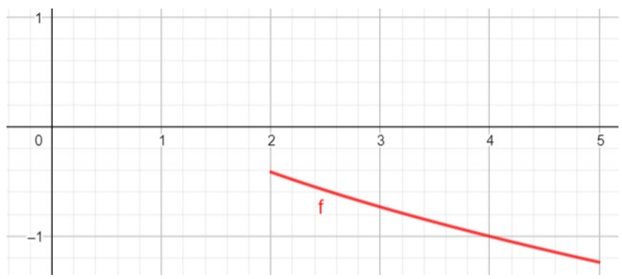
Como a função $A : [0,9] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $[0,9]$, pelo método das fatias temos que o volume do sólido será

$$V = \int_a^b A(x)\,dx \overset{(6)}{=} \int_0^9 \sqrt{3}\,x\,dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\,x^2\,\Big|_{x=0}^{x=9} = \frac{81\,\sqrt{3}}{2}\,\pi\,u.v.\,,$$

finalizando a resolução.

10. Para resolver essa questão devemos usar a fórmula do comprimento de uma curva (está no Apêndice B das notas de aula).

 (a) A curva referida é representada geométrica do gráfico da função $f : [2,5] \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por, $f(x) \doteq 1 - x^{\frac{1}{2}})$, para $x \in [2,5]$, exibida na figura abaixo:



 Para calcular o comprimento da curva, indicada por l, usaremos a seguinte fórmula:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx = \int_2^5 \sqrt{1 + (-\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2})^2}dx = \int_2^5 \sqrt{1 + \frac{x^{-1}}{4}}dx$$

$$l = \int_2^5 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}dx = \int_2^5 \sqrt{\frac{4x+1}{4x}}dx$$

Para resolver a integral acima utilizaremos a seguinte substituição:

$$t \doteq 4x \ \text{ assim }: dt = 4dx$$

Para os novos limites de integração da integral definida, teremos:

$$\text{para } x = 2, \text{ segue que: } t = 8;$$
$$\text{para } x = 5, \text{ segue que: } t = 20.$$

Logo, aplicando o teorema da substituição para a integral definida, obteremos:

$$l = \frac{1}{4}\int_8^{20} \sqrt{\frac{t+1}{t}}dt$$

 Para resolver essa integral definida, podemos aplicar integração por partes com $u = \sqrt{\frac{t+1}{t}}$ e $dv = 1$.
 Deixaremos os detalhes finais como exercício para o leitor.

 (b) Semelhante ao item anterior e ao exemplo B.1.2 das notas de aula.

 (c) Semelhante ao item a) e ao exemplo B.1.1 das notas de aula.