5.a Lista - SMA0354 - Cálculo II - Exercícios resolvidos selecionados

1.o semestre de 2020

Antes de resolver a lista, devemos revisar alguns limites e propriedades importantes já estudados:

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) \tag{1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \tag{2}$$

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} \overset{\text{L'Hôspital}}{=} 0 \tag{3}$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \tag{4}$$

$$\lim_{x\to\infty} \ln(x) = +\infty \tag{5}$$

$$\lim_{x\to a} k = k; \ \ k = constante \tag{6}$$

$$\lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \tag{7}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2} \tag{8}$$

$$\lim_{x\to\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \tag{9}$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{x} = +\infty \tag{10}$$

Nas resoluções, haverá referências a esses limites pelo número que está ao lado.

1. (a) A função $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ é dada por: $f(x) \doteq \dfrac{1}{x^2}$ para $x \in [1,\infty]$, sendo f contínua e integrável nesse intervalo. Portanto, da Definição 5.1.1 das notas de aula e aplicando as propriedades (1) e (2) da seção inicial teremos:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{x}\bigg|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1\,.$$

Como o resultado do limite acima é um número real, concluímos que a integral imprópria é convergente.

(b) A função $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ é dada por: $f(x) \doteq \dfrac{1}{x}$ para $x \in [1,\infty]$, sendo f contínua e integrável nesse intervalo. Portanto, da Definição 5.1.1 das notas de aula e aplicando as propriedades (1) e (5) da seção inicial teremos:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty} \ln(x)\bigg|_1^b = \lim_{b\to\infty}[\ln(b)-\ln(1)] = +\infty.$$

Assim, a partir desse cálculo podemos concluir que a integral imprópria é divergente.

(c) Semelhante ao item b). A integral imprópria é divergente.

(d) A função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é dada por: $f(x) \doteq e^{2x}$ para $x \in [0, \infty]$, sendo f contínua e integrável nesse intervalo. Portanto, da Definição 5.1.1 das notas de aula e aplicando as propriedades (1) e (10) da seção inicial teremos:

$$\int_0^\infty e^{2x} dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{2x} dx = \lim_{b\to\infty} \left.\frac{e^{2x}}{2}\right|_0^b = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{e^{2b}}{2} - \frac{e^0}{2}\right) = +\infty.$$

Assim, a partir desse cálculo podemos concluir que a integral imprópria é divergente.

(e) A função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é dada por: $f(x) = e^{-2x}$ para $x \in [0, \infty]$, sendo f contínua e integrável nesse intervalo. Portanto, da Definição 5.1.1 das notas de aula e aplicando as propriedades (1) e (4) da seção inicial teremos:

$$\int_0^\infty e^{-2x} dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-2x} dx = \lim_{b\to\infty} \left.-\frac{e^{-2x}}{2}\right|_0^b = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{e^{-2b}}{2} + \frac{e^0}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Como o resultado do limite acima é um número real, concluímos que a integral imprópria é convergente.

(f) A função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é dada por: $f(x) \doteq \dfrac{1}{1+x^2}$ para $x \in [0, \infty]$, sendo f contínua e integrável nesse intervalo. Portanto, da Definição 5.1.1 das notas de aula e aplicando as propriedades (1) e (7) da seção inicial teremos:

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b\to\infty} \arctan(x)\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty} [\arctan(b) - \arctan(0)] = \frac{\pi}{2}.$$

Como o resultado do limite acima é um número real, concluímos que a integral imprópria é convergente.

(g) A função $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ é dada por: $f(x) \doteq \dfrac{1}{s^2+x^2}$ para $x \in [1, \infty]$, sendo f contínua e integrável nesse intervalo. Portanto, da Definição 5.1.1 das notas de aula teremos:

$$\int_1^\infty \frac{1}{s^2+x^2} dx = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{s^2} \int_1^b \frac{1}{1+\frac{x^2}{s^2}} dx\right).$$

Fazendo a substituição: $x \doteq us$, segue que $dx = sdu$, na integral definida acima:
e para $x = 1$, segue que $u = \dfrac{1}{s}$
e para $x = b$, segue que $u = \dfrac{b}{s}$, teremos:

$$\lim_{b\to\infty} \frac{1}{s} \int_{\frac{1}{s}}^{\frac{b}{s}} \frac{1}{1+u^2} du = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{s} \arctan(u)\Big|_{\frac{1}{s}}^{\frac{b}{s}} = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{s}\left[\arctan\left(\frac{b}{s}\right) - \arctan\left(\frac{1}{s}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{s}\left[\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{s}\right)\right]$$

Como sabemos que $s > 0$, podemos afirmar que o resultado do limite acima é um número real, e portanto concluímos que a integral imprópria é convergente.

(h) Semelhante ao item e).

(i) A função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é dada por: $f(t) = te^{-st}$ para $t \in [1, \infty]$, sendo f contínua e integrável nesse intervalo. Portanto, da Definição 5.1.1 das notas de aula e aplicando as propriedades (1), (3) e (4) da seção inicial teremos (a integração por partes da função será omitida, visto que jé foi resolvida nas listas anteriores):

$$\int_1^{\infty} te^{-st}dt = \lim_{b\to\infty}\int_1^b te^{-st}dt = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{s^2}\left(-se^{-st}t - e^{-st}\right)\Big|_1^b\right]$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-bse^{-bs} - e^{-bs} + se^{-s} + e^{-s}}{s^2}\right] = -\frac{-e^{-s}s - e^{-s}}{s^2}$$

Como sabemos que $s > 0$, podemos afirmar que o resultado do limite acima é um número real, e portanto concluímos que a integral imprópria é convergente.

(j) Semelhante ao item i). A integral imprópria é convergente para $\dfrac{s}{s^2+1}$.

(k) Fazendo a substituição $u \doteq x^2 + 1$, teremos $du = 2xdx$, e substituindo-se os extremos de integração, chegaremos numa integral imprópria muito semelhante ao item b). A integral imprópria é divergente.

(l) Semelhante ao item i). A integral imprópria é divergente.

2. Primeiro, resolvendo a integral indefinida, se aplicarmos integração por partes, onde : $u \doteq \ln(x)$ e $dv = x^n dx$ assim $du = \frac{1}{x}dx$ e $v = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$. Assim, teremos:

$$\int x^n \ln(x)dx = \frac{x^{n+1}\ln(x)}{n+1} - \int \frac{x^n}{n+1}dx = \frac{x^{n+1}\ln(x)}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

Agora, podemos aplicar o limite da Definição 5.1.1 das notas de aula:

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b x^n\ln(x)dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{n+1}\ln(x)}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\Big|_1^b\right]$$

Analisando o limite acima, podemos concluir que o é $+\infty$, para cada n natural. Portanto, a integral imprópria é divergente, para todo n natural.

3. Todas as funções presentes nessa questão são contínuas e integráveis em intervalos limitados e fechados de $\mathbb{R}$.

(a) Primeiro, dividimos a integral imprópria em duas partes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx + \int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx$$

Agora, sabendo que a integral indefinida

$$\int xe^{-x^2}dx = -\frac{e^{-x^2}}{2} + C$$

(calculada nas listas anteriores) e aplicando os limites das Definições 5.1.1 e 5.1.2 das notas de aula teremos o seguinte:

$$\lim_{a\to-\infty}\left[-\frac{e^{-x^2}}{2}\right]\Bigg|_a^0+\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{e^{-x^2}}{2}\right]\Bigg|_0^b=\lim_{a\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}+\frac{e^{-a^2}}{2}\right]+\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{e^{-b^2}}{2}+\frac{1}{2}\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0.$$

Como o resultado da integral é um número real, concluímos que a integral imprópria é convergente.

(b) Primeiro, dividimos a integral imprópria em duas partes:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}\,dx+\int_{0}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

A segunda parte da integral imprópria (de 0 a ∞) já foi calculada na questão 1 - item f) e sabemos que ela converge para $\frac{\pi}{2}$. Portanto, basta fazer a primeira parte (de $-\infty$ a 0). Sabemos que a integral indefinida é igual a função arctan. Então teremos:

$$\lim_{a\to-\infty}(\arctan(x))\Big|_a^0=\lim_{a\to-\infty}[\arctan(0)-\arctan(a)]=\frac{\pi}{2}.$$

Portanto, como as duas parcelas da integral imprópria inicial convergem, a integral imprópria é convergente.

(c) Primeiro, dividimos a integral em duas partes. Devemos nos atentar ao módulo no expoente. Na primeira parcela da integral (de $-\infty$ a 0) sabemos que x é negativo, portanto nesse intervalo $|x|=-x$. Já na segunda parcela (de 0 a ∞) x é positivo, então $|x|=x$. Assim teremos o seguinte:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x|}dx=\int_{-\infty}^{0}e^{x}dx+\int_{0}^{\infty}e^{-x}dx$$

Agora, sabendo que a primeira integral resulta em e^x e a segunda em $-e^x$, podemos aplicar os limites das Definições 5.1.1 e 5.1.2 das notas de aula:

$$\lim_{a\to-\infty}e^x\Big|_a^0+\lim_{b\to\infty}-e^{-x}\Big|_0^b=\lim_{a\to-\infty}(1-e^a)+\lim_{b\to\infty}(-e^{-b}+1)=2$$

Portanto, como as duas parcelas da integral imprópria inicial convergem, a integral imprópria é convergente.

(d) A parcela de 1 a ∞ da integral imprópria acima, foi calculada no item k) e é divergente. Se uma das parcelas diverge a integral imprópria é divergente.

4. (a) Semelhante à questão 1 - item e).

(b) A função $f:[0,\infty]\to\mathbb{R}$ é dada por: $f(x)\doteq\frac{1}{(1+x)^3}$ para $x\in[0,\infty]$, sendo f contínua e integrável nesse intervalo. Portanto, da Definição 5.1.1 das notas de aula teremos:

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+x)^3}dx\overset{u=x+1}{=}\lim_{b\to\infty}\int_1^{b+1}\frac{1}{u^3}du=\lim_{b\to\infty}-\frac{1}{2x^2}\Bigg|_1^{b+1}=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2(b+1)^2}+\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}.$$

Como o resultado do limite acima é um número real, concluímos que a integral imprópria é convergente.

(c) Semelhante ao item a). A integral converge para $\frac{3}{2}$.

(d) A função $f : [1, \infty] \to \mathbb{R}$ é dada por: $f(x) \doteq \dfrac{1}{x^2}\sin(\dfrac{1}{x})$ para $x \in [1, \infty]$, sendo f contínua e integrável nesse intervalo. Portanto, da Definição 5.1.1 das notas de aula teremos:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx \overset{u=\frac{1}{x}}{=} \lim_{b\to\infty}\int_1^{\frac{1}{b}} -\sin(u)du = \lim_{b\to\infty}\cos(u)\Big|_1^{\frac{1}{b}} = \lim_{b\to\infty}\left[\cos\left(\frac{1}{b}\right) - \cos(1)\right] = 1-\cos(1)$$

Como o limite acima é um número real, concluímos que a integral imprópria é convergente.

(e) A função $f : [e, \infty] \to \mathbb{R}$ é dada por: $f(x) \doteq \dfrac{1}{x\ln(x)}$ para $x \in [e, \infty]$, sendo f contínua e integrável nesse intervalo. Portanto, da Definição 5.1.1 das notas de aula teremos:

$$\int_e^{\infty} \frac{1}{x\ln(x)}dx \overset{u=\ln(x)}{=} \lim_{b\to\infty}\int_1^{\ln(b)} \frac{1}{u}du = \lim_{b\to\infty}\ln(u)\Big|_1^{\ln(b)} = \lim_{b\to\infty}[\ln(\ln(b)) - \ln(1)] = +\infty$$

Assim, a partir desse cálculo podemos concluir que a integral imprópria é divergente.

(f) A função $f : [e, \infty] \to \mathbb{R}$ é dada por: $f(x) \doteq \dfrac{1}{x[\ln(x)]^2}$ para $x \in [e, \infty]$, sendo f contínua e integrável nesse intervalo. Portanto, da Definição 5.1.1 das notas de aula teremos:

$$\int_e^{\infty} \frac{1}{x[\ln(x)]^2}dx \overset{u=\ln(x)}{=} \lim_{b\to\infty}\int_1^{\ln(b)} \frac{1}{u^2}du = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^{\ln(b)} = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{\ln(b)} + \frac{1}{1}\right] = 1$$

Como o limite acima é um número real, concluímos que a integral imprópria é convergente.

(g) Semelhante ao item i) da questão 1. Aplicar integral por partes para as integrais definidas e fazer o limite. A integral imprópria é convergente .

(h) Semelhante ao item i) da questão 1. Aplicar integral por partes para as integrais definidas e fazer o limite. A integral imprópria é convergente.

5. (a) Como sabemos, por definição, a função cos varia entre -1 e 1. Ou seja:

$$-1 \le \cos(x) \le 1, \text{ para } x \in [1, \infty]$$

Partindo disso, podemos afirmar que a função $\cos^2(x)$ varia entre 0 e 1, ou seja:

$$0 \le \cos^2(x) \le 1, \text{ para } x \in [1, \infty]$$

Sabendo desse comportamento para $\cos^2(x)$, podemos dizer com certeza que:

$$0 \le \frac{\cos^2(x)}{1+x^2} \le \frac{1}{1+x^2}, \text{ para } x \in [1, \infty]$$

Como mostrado no item f) da questão 1, a integral imprópria da função que está a direita da inequação nesse intervalo é convergente (isto é, $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$ é convergente). Portanto, pelo Teorema da comparação (5.2.1 nas notas de aula), podemos afirmar que a integral imprópria $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\cos^2(x)}{1+x^2}dx$ também é convergente, finalizando a resolução.

(b) Como sabemos a função e^{-x} é positiva e menor que 1, para x entre 0 e 1. Ou seja:

$$0 < e^{-x} < 1, \text{ para } x \in [0,1]$$

Sabendo disso, podemos afirmar que:

$$0 \leq \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}, \text{ para } x \in [0,1]$$

Agora, podemos verificar a convergência da integral de $\frac{1}{\sqrt{x}}$:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to 0}\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to 0} 2\sqrt{x}\Big|_t^1 = \lim_{t\to 0} 2 - 2\sqrt{t} = 2$$

Portanto, essa integral imprópria é convergente. Com isso, podemos aplicar o Teorema E.1.1 das notas de aula (comparação de integrais impróprias de 1.a espécie), e concluir que a integral imprópria $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$ também é convergente.

(c) A função $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) \doteq \dfrac{x}{1+3x-x^7+x^{10}}$, para $x \in [1\,,\infty)$, é contínua e integrável nesse intervalo. Além disso, teremos:

$$\lim_{x\to\infty} x^9 f(x) = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^{10}}{1+3x-x^7+x^{10}}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^{10}}{x^{10}(\frac{1}{x^{10}}+\frac{3}{x^9}-\frac{1}{x^3}+1)}\right] = 1 = A$$

Como $A = 1 \in [0,\infty)$ e $p = 9 > 1$, podemos aplicar o teorema 5.2.2 das notas de aula. A partir dele, podemos afirmar que a integral imprópria $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{1+3x-x^7+x^{10}}dx$ é convergente.

(d) A função $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) \doteq \dfrac{e^{-x}}{x^4+3e^{-x}}$, para $x \in [0\,,\infty)$, é contínua e integrável nesse intervalo. Além disso, teremos:

$$\lim_{x\to\infty} x^4 f(x) = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^4 e^{-x}}{x^4+3e^{-x}}\right] \overset{\text{exercício}}{=} 0 = A$$

Como $A = 0 \in [0,\infty)$ e $p = 4 > 1$, podemos aplicar o teorema 5.2.2 das notas de aula. A partir dele, podemos afirmar que a integral imprópria $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x^4+3e^{-x}}dx$ é convergente.