6.a Lista - SMA0354 - Cálculo II - Exercícios resolvidos selecionados

1.o semestre de 2020

1. (a) Primeiramente, como $x = \sin(t)$ e $y = \cos(t)$, para $t \in [0, 2\pi]$, podemos concluir que o traço da curva parametrizada acima forma uma circunferência de raio 1 com centro na origem, pois:

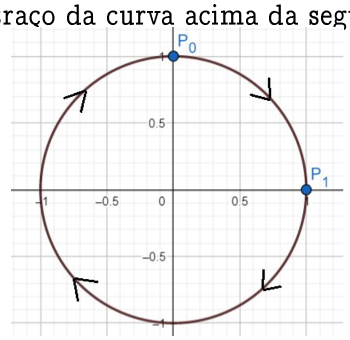
$$x^2 + y^2 = \sin^2(t) + \cos^2(t) = 1, \text{ para } t \in [0, 2\pi]$$

Além disso, podemos identificar o sentido de percurso da mesmacom a seguinte lógica:

$$\text{Quando } t = 0, \text{ estamos no ponto inicial da curva, } P_0 = (0, 1).$$

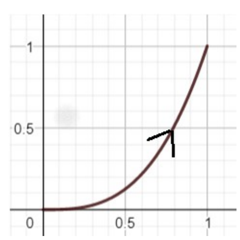
$$\text{e para } t = \frac{\pi}{2} \text{ teremos } P_1 = (1, 0).$$

Dessa forma, podemos ver que a circunferência é percorrida no sentido horário. A representação geométrica do traço da curva acima da seguinte forma:

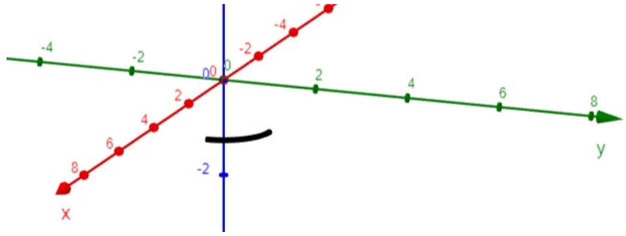


(b) Para a curva em questão temos que: $x = t$ e $y = t^3$, para $x \in [0, 1]$. Sabendo disso, podemos concluir que o traço da curva percorre a representação geométrica do gráfico da função $y = x^3$, para $x \in [0, 1]$. O ponto inicial, quando $t = 0$, é $P_0 = (0, 0)$ e o ponto final, com $t = 1$, é $P_f = (1, 1)$. Portanto, o sentido de percurso é saindo da origem e indo para $(1, 1)$.

A representação geométrica do traço da curva acima da seguinte forma:



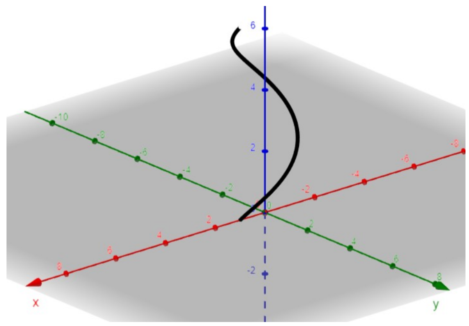
(c) Semelhante ao item a). O traço da curva é um quarto de circunferência que está contida no plano $z = -1$ e percorrida no sentido anti-horário:



(d) Observemos que nessa parametrização, assim como no item c) as coordenadas x e y são respectivamente $\cos(t)$ e $\sin(t)$, para $t \in [0, 2\pi]$. Isso nos indica que a projeção da curva no plano xOy é uma circunferência no sentido anti-horário. Mas além disso, devemos analisar que a coordenada z aumenta quando t aumenta, pois $z = t$.

Juntando essas informações, podemos concluir que z aumenta ao longo do percurso da circunferência em xOy, ou seja, o traço da curva forma uma espiral ascendente que começa em $P_0 = (1, 0, 0)$, quando $t = 0$ e termina em $P_f = (1, 0, 2\pi)$.

A representação geométrica do traço da curva acima da seguinte forma:



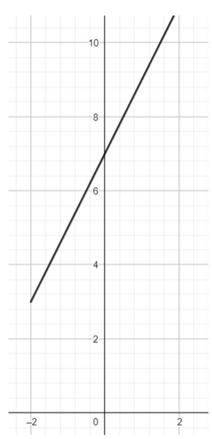
2. (a) Primeiro, devemos definir os valores que x pode assumir: notemos que, como $t > 0$ e $x = t - 2$, então $x > -2$.

Agora, podemos isolar a variável t em função da variável x e substituir o valor obtido na que cuida da variável y, ou seja:

$$t = 2 + x, \text{ logo } y = 2(2 + x) + 3 \text{ , assim: } y = 2x + 7 \text{ para } x > -2$$

A equação em que chegamos representa uma reta que intercepta o eixo Oy no ponto $P = (0, 7)$ e tem coeficiente angular igual a 2.

A representação geométrica do traço da curva acima da seguinte forma:



(b) Semelhante ao item a). Isolando-se t^2 em função da variável x (ou seja, $t = x - 1$) e substituindo-se este valor na que cuida da variável y, obteteremos $y = x - 18$.

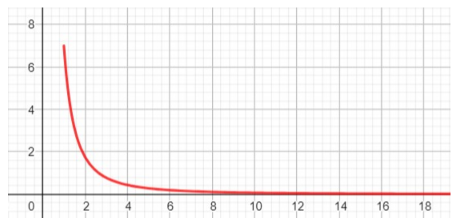
(c) Semelhante ao item a). Isolando-se t em função da variável y (ou seja, $t = \frac{y-3}{2}$) e substituindo-se este valor na que cuida da variável x, obteremos $x = y^2 - 6y + 4$.

(d) Primeiro, devemos definir os valores que x pode assumir: como $t > 0$ e $x = e^t$, então $x > 1$. Analisando a variável y temos: $y = 7(e^t)^{-2}$. Como $x = e^t$, podemos substituir este valor na variável y, obtendo-se:

$$y = 7x^{-2}, \text{ ou seja, } y = \frac{7}{x^2}, \text{ para } x > 1$$

Podemos notar que quando x vai para infinito, da equação acima, segue que a variável y tende para 0.

A representação geométrica do traço da curva acima da seguinte forma:



(e) Semelhante ao item a). Isolando-se t na equação obteremos $t = \sqrt{x}$) e substituindo na envolvendo a variável y, obteremos: $y = 2\ln(\sqrt{x})$

(f) Semelhante ao item a) da questão 1 e teremos:$x^2 + y^2 = 1$

3. (a) Já tratada anteriormente

(b) $F(t) = (t, \sqrt{t})$, para $t \in [0, \infty)$

(c) $F(t) = (\cos(t), 2\sin(t))$, para $t \in [0, 2\pi]$

(d) $F(t) = (1 + 2\cos(t), 4 + 2\sin(t))$, para $t \in [0, 2\pi]$

4. Para resolver essa questão, usaremos a Definição G.2.3 das notas de aula, que nos diz que, para o limite de uma função vetorial existir, os limites de cada componentes devem existir. E, caso o limite exista, ele é dado por:

$$\lim_{t \to t_0} F(t) = \lim_{t \to t_0} (x(t), y(t), z(t)) = (\lim_{t \to t_0} x(t), \lim_{t \to t_0} y(t), \lim_{t \to t_0} z(t)) \tag{1}$$

(a) Aplicando (??) acima, obteremos:

$$\lim_{t \to t_0} F(t) = \left(\lim_{t \to 1} \left[\frac{\sqrt{t} - 1}{t - 1} \right], \lim_{t \to 1} t^2, \lim_{t \to 1} \left[\frac{t - 1}{t} \right] \right) = \left(\frac{1}{2}, 1, 0 \right)$$

O segundo e o terceiro limites são simples, bastando substituir t por 1 nas respectivas funções do limite.

O primeiro pode ser calculado utilizando-se a regra de L'Hôspital, pois substituindo t por 1 chegamos em $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{t \to 1} \left[\frac{\sqrt{t} - 1}{t - 1} \right] \overset{\text{L'Hôspital}}{=} \lim_{t \to 1} \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}$$

(b) Aplicando (??) acima, obteremos::

$$\lim_{t\to t_0} F(t) = \left(\lim_{t\to 0}\left[\frac{\tan(3t)}{t}\right], \lim_{t\to 0}\left[\frac{e^{2t}-1}{t}\right], \lim_{t\to 0} t^3 \right) = (3,1,0)$$

O terceiro limite é trivial, bastando substituir t por 0. O segundo e o terceiro podem ser calculados por L'hospital, pois substituindo t por 0 chegamos em $\frac{0}{0}$. O cálculo do limite será deixado como exercício.

(c) Semelhante aos anteriores

5. Para resolver essa questão, usaremos a Definição G.3.4 das notas de aula;

(a) Para verificar que γ é regular em um ponto t_0, devemos verificar que $\gamma'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$:

$$\gamma'(t) = \left(\frac{d(\cos(2t))}{dt}, \frac{d(\sin(2t))}{dt} \right) = (-2\sin(2t), 2\cos(2t)) \neq \overrightarrow{0}, \text{ para } t \in \mathbb{R}$$

Assim, podemos afirmar que a curva é regular para qualquer t real, já que nío existe valor de t que zere o vetor tangente. A equaçío tangente í curva no ponto $\gamma(0)$ pode ser encontrada com o ponto inicial e o vetor tangente $\gamma'(0)$. Já a reta normal pode ser encontrada com o ponto inicial e o vetor normal:

$$\text{ponto inicial: } \gamma(0) = (\cos(2t), \sin(2t)) = (1,0)$$

$$\text{vetor tangente: } \gamma'(0) = (-2\sin(0), 2\cos(0)) = (0,2)$$

vetor normal: troca as coordenadas do vetor tangente e muda o sinal de uma delas $\rightarrow (-2,0)$

$$\text{equação da reta tangente: } (x,y) = (1,0) + \lambda(0,2), \text{ para } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{equação da reta normal: } (x,y) = (1,0) + \lambda(-2,0), \text{ para } \lambda \in \mathbb{R}$$

(b) Semelhante ao item a).

6. (a) Inicialmente, notemos que no ponto $P_0 = (1,0,4)$, temos $t = 0$. Agora devemos calcular o vetor tangente $\gamma'(t)$. Para calcula-lo, basta derivar as coordenadas de $\gamma(t)$ separadamente:

$$\gamma'(t) = (e^t, e^t + te^t, 2t), \text{ logo } \gamma'(0) = (1,1,0).$$

Pela definição do enunciado, sabemos que o vetor tangente a curva no ponto P_0, $\gamma'(0)$, é o vetor normal ao plano π, que é perpendicular à curva e que o ponto P_0 pertence ao plano π. Assim, como visto na disciplina de Geometria Analítica, podemos encontrar a equação do plano π. Os coeficientes das variáveis x, y e z são as coordenadas do vetor normal:

$1x + 1y + 0z = d$, e substituindo-se o ponto P_0, obteremos a seguinte equação:

$$\pi : x + y = 1$$

(b) Semelhante ao item a).