7.a Lista - SMA0354 - Cálculo II - Exercícios resolvidos selecionados

1.o semestre de 2020

A partir dessa lista serão selecionados menos Exercícios, focando principalmente nos conteúdos indicados pelo Prof. Wagner (ele orientará vocês sobre isso nas aulas online). Qualquer dúvida em Exercícios que não forem resolvidos podem mandar por e-mail (pascualotej@usp.br).

1. (a) Para determinar o domínio, devemos nos atentar à observação 6.1.1 das notas de aula, a qual nos diz que o domínio de uma função será o maior subconjunto, para o qual a relação que define a função dada, faça sentido. Dessa forma, como a função é dada por $f(x,y) = 2x - y^2$, podemos ver que a relação dada faz sentido para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Ou seja:

$$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

Para determinar o conjunto imagem basta analisar a função e os valores que ela assume. Podemos notar então que a imagem da função é toda reta real. Ou seja:

$$Im(f) = \{z \in \mathbb{R}\}$$

finalizando a resolução.

(b) Usando a mesma observação 6.1.1 citada anteriormente e analisando a função $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 + y^2}$ notamos que a relação dada são faz sentido se a expressão dentro da raiz quadrada for maior ou igual a 0. Ou seja, a relação faz sentido se $4 - x^2 + y^2 \geq 0$. Portanto, o domínio da funçãoé:

$$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - y^2 \leq 4\}$$

Como a função éuma raiz quadrada, os valores da imagem são podem ser não negativos (maiores ou iguais a zero). Portanto, a imagemé:

$$Im(f) = \{z \in \mathbb{R}; z \geq 0\}$$

finalizando a resolução.

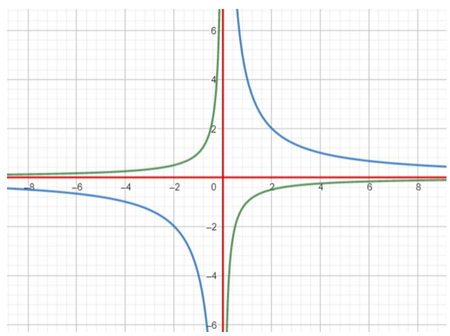
(c) Semelhante aos anteriores. A condição de existência éque o denominador seja diferente de zero. A partir disso, podemos determinar o domínio e a imagem.

2. Identificar a curva de nível, de nível c de uma função $z = f(x,y)$, equivale a identificar a intersecção da função com o plano $z = c$. Dessa forma, para encontrar a curva de nível basta igualarmos a função a c e analisar a equação formada.

(a) Aplicando o que foi dito para cada c, teremos:

$$c = -1, \text{ logo } f(x,y) = xy = -1; \text{ Portanto a curva de nível -1 é: } y = -\frac{1}{x};$$
$$c = 0, \text{ logo } f(x,y) = xy = 0. \text{ Portanto a curva de nível 0 é: } x = 0 \text{ e } y = 0;$$
$$c = 4, \text{ logo } f(x,y) = xy = 4. \text{ Portanto a curva de nível 4 é: } y = \frac{4}{x}.$$

Agora, sabendo as equações, podemos desenhar as curvas no plano xOy. Aqui cada nível está identificado por cores diferentes (-1 é verde, 4 é azul e 0 é vermelho) mas normalmente basta colocar o valor de c ao lado de cada curva.



(b) Semelhante ao anterior. As curvas dos níveis -1 e 0 serão circunferências centradas no ponto $P = (1, -3)$ com raios iguais a $\sqrt{5}$ e 2, respectivamente. A curva de nível 0 éapenas o ponto P.

3. Para encontrar as superfícies de nível c de uma função $w = f(x, y, z)$ podemos aplicar uma técnica semelhante à do item anterior: igualar a função a c, ou seja, considerar $w = c$.

(a) Aplicando o que foi dito para cada c, teremos:

$$c = -1, \text{ logo } f(x,y,z) = 2x - 3y + z = -1;$$
$$c = 0, \text{ logo } f(x,y,z) = 2x - 3y + z = 0\ ;$$
$$c = 4, \text{ logo } f(x,y,z) = 2x - 3y + z = 4.$$

Dessa forma, podemos ver que as superfícies de nível dessa função formam uma família de planos paralelos com vetor normal $\vec{n} = (2, -3, 1)$.

(b) Semelhante ao item anterior. Aqui,as superfícies de nível serão esferas de raio $|c|$, exceto pelo nível 0, para o qual a superfície será apenas o ponto $P = (0, 0, 0)$.

4. (a) Primeiro, devemos identificar qual curva de nível contém o ponto $P_0 = (1, 4)$. Para isso, basta substituir o ponto na função e calcular o valor que ela assume:

$$z = f(x,y) = y \arctan(x), \text{ logo } f(1,4) = 4 \arctan(1) = 2\pi.$$

Portanto, a curva de nível que contém o ponto P_0 é a de nível $c = 2\pi$. Para achar a sua equação, aplicaremos a mesma técnica do Exercício 2:

$$z = f(x, y) = y \arctan(x) = 2\pi, \text{ logo } y = \frac{2\pi}{\arctan(x)},$$

finalizando a resolução.

(b) Semelhante ao item anterior. Para achar a equação da superfície de nível deve-se aplicar a técnica mostrada no Exercício 3.

5. Não será resolvida pois não está entre os principais assuntos.

6. Não será resolvida pois não está entre os principais assuntos.

7. (a) Consideremos $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $g(x, y) = x - y$. Como ambas são contínuas no ponto analisado, $P = (0, 1)$, podemos afirmar que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x, y) = f(0, 1) = 1 = L_1;$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} g(x, y) = g(0, 1) = -1 = L_2 \neq 0.$$

Dessa forma, pelo item c) da proposição 7.1.1 das notas de aula, podemos afirmar que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{1}{-1} = -1,$$

finalizando a resolução.

(b) Semelhante ao item (a).

(c) Analisando a função podemos ver que ela é definida e contínua em $P = (1, 0)$. Portanto, podemos afirmar que:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x, y) = f(1, 0) = \sqrt{1^2 + 0 - 1} = 0,$$

finalizando a resolução.

(d) Semelhante ao item (a).

(e) Semelhante ao item (c).

(f) Consideremos $f(x, y, z) = |x - y|$ e $g(x, y, z) = |x + xy + y^2 z|$. Como ambas são contínuas no ponto analisado, $P = (1, -1, 4)$, podemos afirmar que:

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,-1,4)} f(x, y, z) = f(1, -1, 4) = 2 = L_1 \ ,$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,1)} g(x, y, z) = g(1, -1, 4) = 4L_2 \neq 0.$$

Dessa forma, pelo item c) da proposição 7.1.1 das notas de aula, podemos afirmar que:

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,-1,4)} \frac{f(x, y, z)}{g(x, y, z)} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

finalizando a resolução.

8. (a) Desenvolvendo o limite dado, teremos:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)^2}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x-y) = 0.$$

Portanto, constatamos que a afirmação é verdadeira.

(b) Para desenvolver o limite dado, devemos multiplicar em cima e embaixo pelo conjugado do denominador. Ou seja, multiplicar o numerador e o denominador por x^2-y. Depois disso, basta aplicar o produto notável $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. Teremos o seguinte:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^2}{x^2+y}.\left[\frac{x^2-y}{x^2-y}\right] = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^4-y^2)(x^2-y)}{x^4-y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2-y) = 0.$$

Portanto, constatamos que a afirmação é verdadeira.

(c) Para desenvolver o limite dado, devemos multiplicar em cima e embaixo pelo conjugado do numerador. Ou seja, multiplicar o numerador e o denominador por $\sqrt{x+y}+1$. Depois disso, basta aplicar o produto notável $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. Teremos o seguinte:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sqrt{x+y}-1}{x+y-1}.\left[\frac{\sqrt{x+y}+1}{\sqrt{x+y}+1}\right] = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x+y-1}{(x+y-1)(\sqrt{x+y}+1)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{1}{\sqrt{x+y}+1} = \frac{1}{2} \neq 2\ .$$

Portanto, constatamos que a afirmação é falsa.

9. (a) Nesse item temos $f(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Podemos verificar se o limite existe usando duas curvas parametrizadas $\gamma_1(t)$ e $\gamma_2(t)$, como mostrado na Observação 7.1.4 das notas de aula:

$$\gamma_1(t) = (t,0),\ \text{logo}\ L_1 = \lim_{t\to 0} f[\gamma_1(t)] = \lim_{t\to 0} \frac{0}{\sqrt{t^2+0^2}} = 0,$$

$$\gamma_2(t) = (t,t),\ \text{logo}\ L_2 = \lim_{t\to 0} f[\gamma_2(t)] = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sqrt{t^2+t^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{t\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dessa forma, podemos ver que $L_1 \neq L_2$. Então, do teorema 7.1.1 podemos afirmar que o limite NÃO existe, finalizando a resolução.

(b) Semelhante ao item (a). Podemos escolher as curvas $\gamma_1(t) = (t,t)$ e $\gamma_2(t) = (t,-t)$. Com isso, teremos $L_1 = 1$ e $L_2 = -1$. Assim poderemos concluir que o limite não existe, pois $L_1 \neq L_2$.

(c) Semelhante ao item (a). Podemos escolher as curvas $\gamma_1(t) = (t,0,t)$ e $\gamma_2(t) = (0,0,t)$. Com isso, teremos $L_1 = \frac{1}{2}$ e $L_2 = 0$. Assim poderemos concluir que o limite não existe, pois $L_1 \neq L_2$.

(d) Inicialmente, devemos notar que no denominador temos 2 produtos notáveis:

$$f(x,y) = \frac{y-1}{\sqrt{(x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)}} = \frac{y-1}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}.$$

Assim, podemos aplicar uma mudança de variável. Consideremos $u = x - 1$ e $v = y - 1$. Dessa forma, se (x, y) logo $(1, 1)$ então, (u, v) logo $(0, 0)$. O limite ficará da seguinte forma:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{y-1}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}} = \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}.$$

O limite em que chegamos é exatamente o mesmo do item (a), mudando apenas as variáveis. Portanto, podemos concluir que o limite NÃO existe, finalizando a resolução.

(e) Semelhante ao item (a) do Exercício 7. Podemos aplicar a propriedade do limite de um quociente de funções, pois o limite da função que está no denominador é diferente de 0. Dessa forma, poderemos concluir que o limite existe e é igual a 0.

(f) Semelhante ao item (d). Aplicar a mudança de variável $v = y - 2$.

10. (a) Inicialmente, devemos perceber que $x^2 \leq x^2 + y^2$ para todo (x, y), pois y^2 é sempre positivo. Sabendo disso, podemos afirmar que:

$$-1 \leq \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1 \text{ para } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ e portanto:}$$

$$-y \leq \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \leq y \text{ para } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Assim, como sabemos que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} -y = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$$

Pelo Teorema do Confronto, podemos afirmar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0,$$

finalizando a resolução.

(b) Semelhante ao item (a). Devemos ver que $-1 \leq \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$. E portanto, $-y \leq \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq y$.

(c) Não épossível usar o Teorema do Confronto. Podemos verificar que o limite não existe escolhendo duas curvas parametrizadas, $\gamma_1(t)$ e $\gamma_2(t)$, e calcular os limites de f ao longo dessas curvas:

$$\gamma_1(t) = (t, 0), \text{ logo } L_1 = \lim_{t\to 0} f[\gamma_1(t)] = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t^2} = 1,$$

$$\gamma_2(t) = (t, t), \text{ logo } L_2 = \lim_{t\to 0} f[\gamma_2(t)] = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 - t^2}{t^2 + t^2} = 0.$$

Portanto, como $L_1 \neq L_2$, o limite NÃO existe.

(d) Semelhante ao item (c). Podemos mostrar que o limite não existe usando as curvas parametrizadas.

(e) Não é possível usar o Teorema. A prova mostrando que o limite é igual a 0, pode ser feita usando a definição formal mas será omitida pois não é relevante para esse contexto.

(f) Não é possível aplicar o Teorema. Assim como no item c) podemos usar o método das curvas parametrizadas para mostrar que esse limite NÃO existe.

(g) Nesse item, devemos lembrar inicialmente que, por definição, a função seno élimitada entre -1 e 1. Dessa forma, podemos afirmar que:

$$-1 \leq \sin\left(\frac{xy}{x^2+y^2+z^2}\right) \leq 1 \text{ para } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ e portanto:}$$

$$-\sin(x) \leq \sin(x)\sin\left(\frac{xy}{x^2+y^2+z^2}\right) \leq \sin(x), \text{ para } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Dessa forma, como sabemos que:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} -\sin(x) = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \sin(x) = 0,$$

pelo Teorema do Confronto podemos concluir que:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \sin(x)\sin\left(\frac{xy}{x^2+y^2+z^2}\right) = 0,$$

finalizando a resolução.

11. (a) Como sabemos, a função logaritmo natural, por definição, são pode ter argumento não-negativo. Ou seja, o que está dentro da função ln deve ser maior ou igual a 0. Portanto:

$$x+y-1 \geq 0, \text{ logo } D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x+y \geq 1\}.$$

Como sabemos, a função ln tende para $-\infty$ quando seu argumento tende para 0. Portanto, podemos afirmar que a função é contínua para todos os pontos de seu domínio, exceto se $x+y=1$. Ou seja:

$$f \text{ é contínua em } S = \{(x,y) \in D(f); x+y \neq 1\},$$

finalizando a resolução.

(b) Semelhante ao item (a). A expressão que está na raiz quadrada deve ser positiva.

12. Para resolver os itens dessa questão, aplicaremos a definição de continuidade (Definição 7.2.1 nas notas de aula).

(a) Primeiramente, analisando pontos em que $(x_0,y_0) \neq (0,0)$, teremos o seguinte:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \frac{x_0^3+y_0^3}{x_0^2+y_0^2} = f(x_0,y_0).$$

Portanto, concluímos que $f(x,y)$ é contínua para $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

Agora, considerando $(x_0,y_0) = (0,0)$ devemos verificar se $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$. Portanto, vamos calcular o seguinte limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[x\frac{x^2}{x^2+y^2} + y\frac{y^2}{x^2+y^2}\right]$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[x\frac{x^2}{x^2+y^2}\right] + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[y\frac{y^2}{x^2+y^2}\right].$$

Como já vimos anteriormente, as funções $\frac{x^2}{x^2+y^2}$ e $\frac{y^2}{x^2+y^2}$ são limitadas entre -1 e 1. E também, sabemos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$. Portanto, do item 3) da Proposição 7.1.1 das notas de aula, temos que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[x\frac{x^2}{x^2+y^2}\right] + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[y\frac{y^2}{x^2+y^2}\right] = 0 = f(0,0).$$

Dessa forma, concluímos que $f(x,y)$ também é contínua em $(0,0)$.

Portanto, $f(x,y)$ é contínua em todo $\mathbb{R}^2$, finalizando a resolução.

(b) Podemos mostrar que f é contínua em $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ de maneira análoga ao item (a). Entretanto, para $(x,y) = (0,0)$ devemos analisar o limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Usando o método das curvas parametrizadas teremos:

$$\gamma_1(t) = (t,0),\ \text{logo } L_1 = \lim_{t\to 0} f[\gamma_1(t)] = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^2} = 0\ ,$$

$$\gamma_2(t) = (t,t),\ \text{logo } L_2 = \lim_{t\to 0} f[\gamma_2(t)] = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t^2+t^2} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, como $L_1 \neq L_2$, concluímos que o limite NÃO existe. Assim, podemos afirmar que f não é contínua em $(0,0)$.

Então, $f(x,y)$ não é contínua em todo $\mathbb{R}^2$, finalizando a resolução.

(c) Semelhante ao item (b).