8.a Lista - SMA0354 - Cálculo II - Exercícios resolvidos selecionados

1.o semestre de 2020

Exercício 1.

(a)

Seja $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)\,;\, x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,y)\,;\, y \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) \doteq \frac{2x^4 - xy + 1}{xy}, \quad \text{para } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)\,;\, x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,y)\,;\, y \in \mathbb{R}\}. \tag{1}$$

Notemos que a função f possui derivadas parciais de 1.a ordem em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)\,;\, x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,y)\,;\, y \in \mathbb{R}\}$ e, além disso, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)\,;\, x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,y)\,;\, y \in \mathbb{R}\}$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \overset{(1)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{2x^4 - xy + 1}{xy}\right] = \frac{[8x^3 - y][xy] - [2x^4 - xy + 1]\,y}{(xy)^2} = \frac{8x^4 y - 2x^4 y - y}{x^2 y^2} \tag{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \overset{(1)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{2x^4 - xy + 1}{xy}\right] = \frac{[-x]\,[xy] - [2x^4 - xy + 1]\,x}{(xy)^2} = \frac{-2x^4 - 1}{x^2 y^2}. \tag{3}$$

(b)

Seja $f\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)\,;\, x \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) \doteq \arctan\left(\frac{x}{y}\right), \quad \text{para} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)\,;\, x \in \mathbb{R}\}. \tag{4}$$

Notemos que a função f possui derivadas parciais de 1.a ordem em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)\,;\, x \in \mathbb{R}\}$ e, além disso, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)\,;\, x \in \mathbb{R}\}$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \overset{(4)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left[\arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right] \overset{\text{regra da cadeira}}{=} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}\,\frac{1}{y} = \frac{y}{y^2 + x^2}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \overset{(4)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left[\arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right] \overset{\text{regra da cadeira}}{=} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2 + x^2}, \tag{6}$$

(c)

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) \doteq \operatorname{sen}\left(x^2 - y^3\right), \quad \text{para} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \tag{7}$$

Notemos que a função f possui derivadas parciais de 1.a ordem em $\mathbb{R}^2$ e, além disso, para $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y) &\overset{(7)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left[\text{sen}\left(x^2-y^3\right)\right] \overset{\text{regra da cadeira}}{=} \cos\left(x^2-y^3\right)\,(2\,x) \\
&= 2\,x\,\cos\left(x^2-y^3\right)\,, \qquad (8)\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y) &\overset{(7)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left[\text{sen}\left(x^2-y^3\right)\right] \overset{\text{regra da cadeira}}{=} \cos\left(x^2-y^3\right)\,(-3\,y^2) \\
&= -3\,y^2\,\cos\left(x^2-y^3\right)\,. \qquad (9)
\end{aligned}$$

(d)

Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x\,,y\,,z) \doteq x\,y + x\,z + y\,z\,, \quad \text{para} \quad (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3 \qquad (10)$$

Notemos que a função f possui derivadas parciais de 1.a ordem em $\mathbb{R}^2$ e, além disso, para $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y) &\overset{(10)}{=} \frac{\partial}{\partial x}(x\,y + x\,z + y\,z) = y + z\,, \qquad (11)\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y) &\overset{(10)}{=} \frac{\partial}{\partial y}(x\,y + x\,z + y\,z) = x + z\,. \qquad (12)\\
\frac{\partial f}{\partial z}(x\,,y) &\overset{(10)}{=} \frac{\partial}{\partial y}(x\,y + x\,z + y\,z) = x + y\,. \qquad (13)
\end{aligned}$$

Exercício 2.

Seja $f: (0\,,\infty) \times (0\,,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x\,,y) \doteq x^{x^{x^y}} + \text{sen}(\pi\,x)\left[x^2 + \text{sen}(x+y) + e^x\,\cos^2(y)\right]\,,\,, \quad \text{para} \quad (x\,,y) \in (0\,,\infty) \times (0\,,\infty)\,.$$

Lembremos que, se $a > 0$,

$$\begin{aligned}
a^b &\doteq e^{b\ln(a)} \\
\text{logo} \quad x^{x^{x^y}} &= e^{\ln(x)\,e^{\ln(x)\,e^{y\,\ln(x)}}} \qquad (14)
\end{aligned}$$

para $(x\,,y) \in (0\,,\infty) \times (0\,,\infty)$ e assim

$$f(x\,,y) \doteq e^{\ln(x)\,e^{\ln(x)\,e^{y\,\ln(x)}}} + \text{sen}(\pi\,x)\left[x^2 + \text{sen}(x+y) + e^x\,\cos^2(y)\right]\,, \qquad (15)$$

Logo, para encontrar as derivadas parciais pedidas basta aplicar a regra da cadeia para (15).
Deixaremos os detalhes como exercício para o leitor.

Exercício 3.

(a)

Notemos que a função f possui derivadas parciais de 2.a ordem em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x\,,0)\,;\, x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0\,,y)\,;\, y \in \mathbb{R}\}$ e, além disso, para $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x\,,0)\,;\, x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0\,,y)\,;\, y \in \mathbb{R}\}$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x\,,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\right] \overset{(2)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{8\,x^4\,y - 2\,x^4\,y - y}{x^2\,y^2}\right] \\
&= \frac{[32\,x^3 y - 8\,x\,y]\,[x^2\,y^2] - [8\,x^4\,y - 2\,x^4\,y - y]\,2\,x\,y^2}{(x^2\,y^2)^2}\,, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x\,,y) &\overset{\text{Teorema de Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\right] \overset{(2)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{8\,x^4\,y - 2\,x^4\,y - y}{x^2\,y^2}\right] \\
&= \frac{8\,x^4 - 2\,x^4 - 1}{(x^2\,y^2)^2}\,, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x\,,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y)\right] \overset{(3)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{-2\,x^4\, - 1}{x^2\,y^2}\right] = \frac{-2\,x^4\, - 1}{x^2}\left[(-2)\,\frac{1}{y^3}\right] = \frac{4\,x^4\, + 2}{x^2\,y^3}\,.
\end{aligned}$$

(b)

Notemos que a função f possui derivadas parciais de 1.a ordem em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x\,,0)\,;\, x \in \mathbb{R}\}$ e, além disso, para $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x\,,0)\,;\, x \in \mathbb{R}\}$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x\,,y)\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\right] &\overset{(5)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{y}{y^2 + x^2}\right] = \frac{y}{y^2 + x^2}\,(2\,x) = \frac{2\,x\,y}{y^2 + x^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x\,,y) &\overset{\text{Teorema de Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\right] \overset{(5)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y}{y^2 + x^2}\right] \\
&= \frac{1\,(y^2 + x^2) - y\,(2\,y)}{(y^2 + x^2)^2} = \frac{1}{y^2 + x^2}\,, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x\,,y)\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y)\right] &\overset{(6)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{x}{y^2 + x^2}\right] = \frac{2\,x\,y}{(x^2 + y^2)^2}\,.
\end{aligned}$$

(c)

Notemos que a função f possui derivadas parciais de 1.a ordem em $\mathbb{R}^2$ e, além disso, para $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x\,,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\right] \overset{(8)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left[2\,x\,\cos\left(x^2 - y^3\right)\right] \\
&= 2\,\cos\left(x^2 - y^3\right) + 2\,x\left[-\operatorname{sen}\left(x^2 - y^3\right)\,(2\,x)\right] = 2\,\cos\left(x^2 - y^3\right) - 4\,x^2\,\operatorname{sen}\left(x^2 - y^3\right)\,, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x\,,y) &\overset{\text{Teorema de Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\right] \overset{(8)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left[2\,x\,\cos\left(x^2 - y^3\right)\right] \\
&= 2\,x\,[-\operatorname{sen}\left(x^2 - y^3\right)]\,(-3\,y^2)] = -6\,x\,y^2\,\operatorname{sen}\left(x^2 - y^3\right)\,, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x\,,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y)\right] \overset{(9)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left[-3\,y^2\,\cos\left(x^2 - y^3\right)\right] = (-6\,y)\,\cos\left(x^2 - y^3\right) - 3\,y^2\,[-\operatorname{sen}\left(x^2 - y^3\right)\,(-3\,y^2)] \\
&= -6\,y\,\cos\left(x^2 - y^3\right) - 9\,y^4\,\operatorname{sen}\left(x^2 - y^3\right)\,.
\end{aligned}$$

(d)

Notemos que a função f possui derivadas parciais de 1.a ordem em $\mathbb{R}^2$ e, além disso, para $(x\,,y) \in$

$\mathbb{R}^2$, temos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\right] \overset{(11)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\,[y+z] = 0\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x\,,y) \overset{\text{Teorema de Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\right] \overset{(11)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\,[y+z] = 1\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y)\right] \overset{(13)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\,[x+z] = 0\,.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}(x\,,y) \overset{\text{Teorema de Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\right] \overset{(13)}{=} \frac{\partial}{\partial z}\,[x+y] = 0\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}(x\,,y) \overset{\text{Teorema de Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y)\right] \overset{(11)}{=} \frac{\partial}{\partial z}\,[x+z] = 1\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial f}{\partial z}(x\,,y)\right] \overset{(13)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\,[x+y] = 0\,.$$

Exercício 4.

(a)

Se a função $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, é dada por

$$U(x\,,y) \doteq e^{-x}\,\cos(y) + e^{-x}\,\text{sen}(y)\,, \quad \text{para} \quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,, \tag{16}$$

então a função U possui derivadas parciais de 2.a ordem contínuas em $\mathbb{R}^2$ e para $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$

Além disso, para $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, temos que:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(t\,,x) \overset{(16)}{=} \frac{\partial}{\partial x}[e^{-x}\,\cos(y) + e^{-x}\,\text{sen}(y)] \overset{\text{regra da cadeia}}{=} e^{-x}\,(-1)\,\cos(y) + e^{-x}\,(-1)\,\text{sen}(y)$$
$$= -e^{-x}\,\cos(y) - e^{-x}\,\text{sen}(y)\,, \tag{17}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}(t\,,x) \overset{(16)}{=} \frac{\partial}{\partial y}[e^{-x}\,\cos(y) + e^{-x}\,\text{sen}(y)] = e^{-x}\,[-\,\text{sen}(y)] + e^{-x}\,\cos(y)$$
$$= -e^{-x}\,\text{sen}(y) + e^{-x}\,\cos(y)\,, \tag{18}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t\,,x) \overset{(17)}{=} \frac{\partial}{\partial x}[-e^{-x}\,\cos(y) - e^{-x}\,\text{sen}(y)] \overset{\text{regra da cadeia}}{=} -e^{-x}\,(-1)\,\cos(y) - e^{-x}\,(-1)\,\text{sen}(y)$$
$$= e^{-x}\,\cos(y) + e^{-x}\,\text{sen}(y)\,, \tag{19}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(t\,,x) \overset{(18)}{=} \frac{\partial}{\partial y}[-e^{-x}\,\text{sen}(y) + e^{-x}\,\cos(y)] = -e^{-x}\,\cos(y) + e^{-x}\,[-\,\text{sen}(y)]$$
$$= -e^{-x}\,\cos(y) - e^{-x}\,\text{sen}(y)\,. \tag{20}$$

Logo para $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, temos:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x\,,y) + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(x\,,y) \overset{(18),(20)}{=} [e^{-x}\,\text{sen}(y) + e^{-x}\,\cos(y)] + [-e^{-x}\,\cos(y) - e^{-x}\,\text{sen}(y)] = 0\,.$$

Exercício 5.

Sejam $\phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções com duas derivadas contínuas em $\mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$ uma constante fixada. Mostre que a função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por

$$u(t\,,x) \doteq \phi(x - c\,t) + \psi(x + c\,t)\,, \text{ para } (t\,,x) \in \mathbb{R}^2\,, \tag{21}$$

Logo para $(t\,,x)\in\mathbb{R}^2$, temos,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(t\,,x) &\overset{(21)}{=} \frac{\partial}{\partial t}[\phi(x-c\,t)+\psi(x+c\,t)] \overset{\text{regra da cadeia}}{=} [\phi'(x-c\,t)\,1+\psi'(x+c\,t)\,1]\\
&= \phi'(x-c\,t)+\psi'(x+c\,t)\,, \qquad (22)\\
\frac{\partial u}{\partial x}(t\,,x) &\overset{(21)}{=} \frac{\partial}{\partial x}[\phi(x-c\,t)+\psi(x+c\,t)] \overset{\text{regra da cadeia}}{=} [\phi'(x-c\,t)\,(-c)+\psi'(x+c\,t)\,c]\\
&= -c\,\phi'(x-c\,t)+c\,\psi'(x+c\,t)\,, \qquad (23)\\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t\,,x) &\overset{(22)}{=} \frac{\partial}{\partial t}[\phi'(x-c\,t)+\psi'(x+c\,t)] \overset{\text{regra da cadeia}}{=} [\phi''(x-c\,t)\,1+\psi''(x+c\,t)\,1]\\
&= \phi''(x-c\,t)+\psi''(x+c\,t)\,, \qquad (24)\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t\,,x) &\overset{(23)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left[-c\,\phi'(x-c\,t)+c\,\psi'(x+c\,t)\right] \overset{\text{regra da cadeia}}{=} [-c\,\phi''(x-c\,t)\,(-c)+c\,\psi''(x+c\,t)\,c]\\
&= c^2\,\phi''(x-c\,t)+c^2\,\psi''(x+c\,t)\,, \qquad (25)
\end{aligned}$$

Logo para $(t\,,x)\in\mathbb{R}^2$, temos,

$$u_{tt}(t\,,x)-c^2\,u_{xx}(t\,,x) \overset{(24),(25)}{=} [c^2\,\phi''(x-c\,t)+c^2\,\psi''(x+c\,t)]-c^2\,[\phi''(x-c\,t)+\psi''(x+c\,t)]=0\,.$$

Exercício 6.

Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x\,,y)\doteq\begin{cases}\dfrac{(x+y)\,\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}\,, & \text{se } (x\,,y)\neq(0\,,0)\\ 0 & \text{, se } (x\,,y)=(0\,,0)\end{cases} \qquad (26)$$

(a)

Notemos que se $(x\,,y)\neq(0\,,0)$, teremos

$$0\leq(|x|-|y|)^2=|x|^2-2\,|x|\,|y|+|y|^2\,,$$
$$\text{ou seja, }\; 2\,|x\,y|\leq x^2+y^2\,,\quad \text{ou ainda}: \frac{2\,|x\,y|}{x^2+y^2}\leq 1 \qquad (27)$$

$$\begin{aligned}
|f(x\,,y)| &= \left|\frac{(x+y)\,\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{(x+y)^2\,(x-y)}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{(x^2+2\,x\,y+y^2)\,(x-y)}{x^2+y^2}\right|\\
&\leq \frac{[x^2+y^2)+|2\,x\,y|]}{x^2+y^2}\,|x-y| = \left[\underbrace{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}_{=1}+\underbrace{\frac{|2\,x\,y|}{x^2+y^2}}_{\overset{(27)}{\leq}1}\right]\,!x-y|\leq 2\,|x-y|\\
\text{ou }\; &-2\,(x-y)\leq f(x\,,y)\leq 2\,(x-y)\,. \qquad (28)
\end{aligned}$$

Mas

$$\lim_{(x\,,y)\to(0\,,0)} -2\,(x-y)=\lim_{(x\,,y)\to(0\,,0)} 2\,(x-y)=0\,,$$

assim, dos limites acima e de (28) e do item 7. da Proposição 7.1.1, da página 206 das notas de aula, (Teorema do sanduiche) segue que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \overset{(26)}{=} f(0,0),$$

mostrando que a função f é contínua em $(0,0)$.

(b)

Para

$$(x_o, y_o) \neq (0,0) \tag{29}$$

a função é contínua em (x_o, y_o) pois

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} (x^2+y^2) = x_o^2 + y_o^2 \overset{(29)}{\neq} 0,$$

assim

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) \overset{(26)\text{ com }(29)}{=} \lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} \frac{(x+y)\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}$$
$$\overset{\text{propriedades básicas de limite}}{=} \frac{(x_o+y_o)\left(x_o^2-y_o^2\right)}{x_o^2+y_o^2}) \overset{(26)\text{ com }(29)}{=} f(x_o, y_o),$$

mostrando que a função f é contínua em (x_o, y_o).

(c)

Notemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} \overset{h\neq 0\text{ e }(26)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{(h+0)\left(h^2-0^2\right)}{h^2+0^2} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{h^2} = \lim_{h\to 0} h = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} \overset{k\neq 0\text{ e }(26)}{=} \lim_{k\to 0} \frac{(0+k)\left(0^2-k^2\right)}{0^2+k^2} = \lim_{k\to 0} \frac{-k^3}{k^2} = -\lim_{k\to 0} k = 0,$$

(d)

Notemos que, para $(x,y) \neq (0,0$, de (26), temos que

$$f(x,y) = \frac{(x+y)\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2} \tag{30}$$

Logo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \overset{(30)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(x+y)\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}\right] = \frac{\left[1\left(x^2-y^2\right)+(x+y)\,2x\right]\left(x^2+y^2\right) - \left[(x+y)\left(x^2-y^2\right)\right]2x}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \overset{(30)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{(x+y)\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}\right] = \frac{\left[1\left(x^2-y^2\right)+(x+y)(-2y)\right](x^2+y^2) - \left[(x+y)\left(x^2-y^2\right)\right]2y}{(x^2+y^2)^2}$$

Exercício 7.

(a)

Como $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é dada por

$$f(x\,,y\,,z) \doteq x^2 + y^2 + z^2\,, \quad \text{para} \quad (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,. \tag{31}$$

Logo para $(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3$, teremos:

$$\begin{aligned}\nabla f(x\,,y\,,z) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y\,,z)\,, \frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y\,,z)\,, \frac{\partial f}{\partial z}(x\,,y\,,z)\right)\\ &\overset{(31)}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)\,, \frac{\partial f}{\partial y}(x^2+y^2+z^2)\,, \frac{\partial f}{\partial z}(x^2+y^2+z^2)\right) = (2\,x\,, 2\,y\,, 2\,z)\,.\end{aligned}$$

é o gradiente da função f no ponto $(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3$.

(b)

Como $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é dada por

$$f(x\,,y\,,z) \doteq x \,\text{arctg}(y+z)\,, \quad \text{para} \quad (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,. \tag{32}$$

Logo para $(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3$, teremos:

$$\begin{aligned}\nabla f(x\,,y\,,z) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y\,,z)\,, \frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y\,,z)\,, \frac{\partial f}{\partial z}(x\,,y\,,z)\right)\\ &\overset{(32)}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x\,\text{arctg}(y+z))\,, \frac{\partial f}{\partial y}(x\,\text{arctg}(y+z))\,, \frac{\partial f}{\partial z}(x\,\text{arctg}(y+z))\right)\\ &= \left(\text{arctg}(y+z)\,, x\,\frac{1}{1+(y+z)^2}\,, x\,\frac{1}{1+(y+z)^2}\right)\,.\end{aligned}$$

é o gradiente da função f no ponto $(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3$.

(c)

Como $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é dada por

$$f(x\,,y) \doteq \text{sen}\left(x\,y^2\right)\,, \quad \text{para} \quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,. \tag{33}$$

Logo para $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, teremos:

$$\begin{aligned}\nabla f(x\,,y) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\,, \frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y)\right) \overset{(33)}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\left[\text{sen}\left(x\,y^2\right)\right]\,, \frac{\partial f}{\partial y}\left[\text{sen}\left(x\,y^2\right)\right]\right)\\ &\overset{\text{regra da cadeia do Cálculo 1}}{=} \left(\cos\left(x\,y^2\right)\,y^2\,, \cos\left(x\,y^2\right)\,2\,y\right)\,.\end{aligned}$$

é o gradiente da função f no ponto $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$.

(d)

Como $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é dada por

$$f(x\,,y) \doteq e^{x^2-y^2}\,, \quad \text{para} \quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,. \tag{34}$$

Logo para $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, teremos:

$$\begin{aligned}\nabla f(x\,,y) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\,, \frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y)\right) \overset{(34)}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\left[e^{x^2-y^2}\right]\,, \frac{\partial f}{\partial y}\left[e^{x^2-y^2}\right]\right)\\ &\overset{\text{regra da cadeia do Cálculo 1}}{=} \left(e^{x^2-y^2}\,2\,x\,, \cos\left(x\,y^2\right)\,(-2\,y)\right)\,.\end{aligned}$$

é o gradiente da função f no ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercício 8.

(a)

Temos que $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ e $\gamma : \left(0, \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right) \to \mathbb{R}^2$ é dada por

$$f(x, y) \doteq \tan\left(x^2 + y\right), \quad \text{para} \quad (x, y) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \tag{35}$$

$$\text{e} \quad \gamma(t) = (x(t), y(t)) \doteq (2t, t^2), \quad \text{para} \quad t \in \left(0, \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right). \tag{36}$$

Como a função f admite derivadas parciais de 1.a ordem em $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, a função γ é diferenciável em $\left(0, \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right)$ e $\gamma\left(0, \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right) \subseteq \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, segue que a função $z \doteq f \circ \gamma : \left(0, \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right) \to \mathbb{R}$ será diferenciável em $\left(0, \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right)$ e para $t \in \left(0, \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right)$, da regra da cadeia (veja o Teorema 9.1.1, da página 255 das notas de aula).

Além disso, para $(x, y) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e $t \in \left(0, \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right)$, temos:

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) \overset{(35)}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\left[\tan\left(x^2 + y\right)\right], \frac{\partial f}{\partial y}\left[\tan\left(x^2 + y\right)\right]\right)$$
$$= \left(\sec^2(x^2 + y)\, 2x, \sec^2(x^2 + y)\right) = \left(2x \sec^2(x^2 + y), \sec^2(x^2 + y)\right), \tag{37}$$
$$\text{e} \quad \gamma'(t) = \left(\frac{dx}{dt}(t), \frac{dy}{dt}(t)\right) \overset{(36)}{=} (2, 2t). \tag{38}$$

Logo, para $t \in \left(0, \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right)$, da fórmula da regra da cadeia (veja o Teorema 9.1.1, da página 255 das notas de aula), teremos

$$z'(t) = \frac{d}{dt}[f \circ \gamma](t) = \nabla f[\gamma(t)] \bullet \gamma'(t) \overset{(37),(38)}{=} \left(2x(t) \sec^2[x^2(t) + y(t)], \sec^2[x^2(t) + y(t)]\right) \bullet (2, 2t)$$
$$\overset{(36)}{=} (2t) \sec^2[4t^2 + t^2]\, 2 + \sec^2[4t^2 + t^2]\, 2t = 6t \sec^2[5t^2].$$

(b)

Temos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ é dada por

$$f(x, y) \doteq e^x [\cos(x) + \operatorname{sen}(y)], \quad \text{para} \quad (x, y) \in \mathbb{R} \tag{39}$$
$$\text{e} \quad \gamma(t) = (x(t), y(t)) \doteq (t^3, t^2), \quad \text{para} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{40}$$

Como a função f admite derivadas parciais de 1.a ordem em $\mathbb{R}$ e a função γ é diferenciável em $\mathbb{R}$, segue que a função $z \doteq f \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ será diferenciáveis em $\mathbb{R}$ e para $t \in \mathbb{R}$, da regra da cadeia (veja o Teorema 9.1.1, da página 255 das notas de aula).

Além disso, para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $t \in \mathbb{R}$, temos:

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) \overset{(39)}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\left[e^x [\cos(x) + \operatorname{sen}(x)]\right], \frac{\partial f}{\partial y}\left[e^x [\cos(x) + \operatorname{sen}(y)]\right]\right)$$
$$= \left(e^x [\cos(x) + \operatorname{sen}(y)] + e^x [\cos(x) + \operatorname{sen}(y)] [-\operatorname{sen}(x)], e^x [\cos(x) + \operatorname{sen}(y)] + e^x [\cos(x) + \operatorname{sen}(y)] \cos(y)\right)$$
$$= \left([1 - \operatorname{sen}(x)]\, e^x [\cos(x) + \operatorname{sen}(y)], [1 + \cos(y)] e^x [\cos(x) + \operatorname{sen}(y)]\right), \tag{41}$$
$$\text{e} \quad \gamma'(t) = \left(\frac{dx}{dt}(t), \frac{dy}{dt}(t)\right) \overset{(40)}{=} \left(3t^2, 2t\right). \tag{42}$$

Logo, para $t \in \mathbb{R}$, da fórmula da regra da cadeia (veja o Teorema 9.1.1, da página 255 das notas de aula), teremos

$$\begin{aligned}
z'(t) &= \frac{d}{dt}[f \circ \gamma](t) = \nabla f[\gamma(t)] \bullet \gamma'(t) \\
&\overset{(41),(42)}{=} \Big([1 - \text{sen}[x(t)]]\, e^{[x(t)]}\, [\cos[x(t)] + \text{sen}[y(t)]]\,, [1 + \cos[y(t)]] e^{[x(t)]}\, [\cos[x(t)] + \text{sen}[y(t)]]\Big) \bullet (3\,t^2\,, 2\,t) \\
&\overset{(42)}{=} 3\,t^2 [1 - \text{sen}(t^3)]\, e^{t^3}\, [\cos(t^3) + \text{sen}(t^2)] + 2\,t\,[1 + \cos(t^2)] e^{t^3}\, [\cos(t^3) + \text{sen}(t^2)]\,.
\end{aligned}$$

(c)

Temos que $f : \mathbb{R} \times [\mathbb{R} \setminus \{0\}] \to \mathbb{R}$ e $\gamma : (0\,, \infty) \setminus \{1\} \to \mathbb{R}^2$ é dada por

$$f(x\,, y) \doteq \frac{x}{y}\,, \quad \text{para} \quad (x\,, y) \in \mathbb{R} \times [\mathbb{R} \setminus \{0\}] \tag{43}$$

$$\text{e} \quad \gamma(t) = (x(t)\,, y(t)) \doteq (e^{-t}\,, \ln(t))\,, \quad \text{para} \quad t \in (0\,, \infty) \setminus \{1\}. \tag{44}$$

Como a função f admite derivadas parciais de 1.a ordem em $\mathbb{R} \times [\mathbb{R} \setminus \{0\}]$, a função γ é diferenciável em $(0\,, \infty) \setminus \{1\}$ e $\gamma((0\,, \infty) \setminus \{1\}) \subseteq \mathbb{R} \times [\mathbb{R} \setminus \{0\}]$, segue que a função $z \doteq f \circ \gamma : (0\,, \infty) \to \mathbb{R}$ será diferenciáveis em $\mathbb{R}$ e para $t \in \mathbb{R}$, da regra da cadeia (veja o Teorema 9.1.1, da página 255 das notas de aula).

Além disso, para $(x\,, y) \in \mathbb{R}^2$ e $t \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned}
\nabla f(x\,, y) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x\,, y)\,, \frac{\partial f}{\partial y}(x\,, y)\right) \overset{(43)}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\left[\frac{x}{y}\right]\,, \frac{\partial f}{\partial y}\left[\frac{x}{y}\right]\right) \\
&= \left(\frac{1}{y}\,, -\frac{x}{y^2}\right)\,,
\end{aligned} \tag{45}$$

$$\text{e} \quad \gamma'(t) = \left(\frac{d\,x}{dt}(t)\,, \frac{d\,y}{dt}(t)\right) \overset{(44)}{=} \left(-e^{-t}\,, \frac{1}{t}\right)\,. \tag{46}$$

Logo, para $t \in \mathbb{R}$, da fórmula da regra da cadeia (veja o Teorema 9.1.1, da página 255 das notas de aula), teremos

$$\begin{aligned}
z'(t) &= \frac{d}{dt}[f \circ \gamma](t) = \nabla f[\gamma(t)] \bullet \gamma'(t) \overset{(45),(46)}{=} \left(\frac{1}{y(t)}\,, -\frac{x(t)}{y^2(t)}\right) \bullet \left(-e^{-t}\,, \frac{1}{t}\right) \\
&\overset{(46)}{=} \frac{1}{\ln(t)}\, e^{-t} - \frac{e^{-t}}{\ln(t)}\, \frac{1}{t} = \left(1 - \frac{1}{t}\right) \frac{e^{-t}}{\ln(t)}\,.
\end{aligned}$$

Exercício 9.

Temos que $h : \text{Dom}(h) \to \mathbb{R}$ é dada por

$$h(u\,, v) \doteq f(x(u\,, v)\,, y(u\,, v))\,, \tag{47}$$

onde $\text{Dom}(h) \doteq \{(u\,, v) \in \mathbb{R}^2\,; \, (x(u\,, v)\,, y(u\,, v)) \in \text{Dom}(f)\,, \text{ para } (x\,, y) \in \text{Dom}(u) \cap \text{Dom}(v)\}$.

(a)

Se $f\,, x\,, y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são dadas por

$$f(x\,, y) \doteq 1 - x^2 - y^2\,, \quad \text{para} \quad (x\,, y) \in \mathbb{R}^2 \tag{48}$$

$$x(u\,, v) \doteq u\,\cos(v)\,, \tag{49}$$

$$y(u\,, v) \doteq u\,\text{sen}(v)\,, \text{ para } (u\,, v) \in \mathbb{R}^2 \tag{50}$$

Então as funções f, x, y possuem derivadas parciais de 1.a ordem em $\mathbb{R}^2$ e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \overset{(48)}{=} -2x, \tag{51}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \overset{(48)}{=} -2y, \quad \text{para} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \tag{52}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \overset{(49)}{=} \cos(v), \tag{53}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \overset{(49)}{=} -u \operatorname{sen}(v), \tag{54}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \overset{(50)}{=} \operatorname{sen}(v), \tag{55}$$

$$\frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \overset{(50)}{=} u \cos(v), \quad \text{para} \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2. \tag{56}$$

Logo, para $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial u}(u, v) &\overset{(47)}{=} \frac{\partial}{\partial u}[f(x(u, v), y(u, v))] \\
&\overset{\text{regra da cadeia}}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \\
&\overset{(51),(52),(53),(55)}{=} -2x(u, v) \cos(v) - 2y(u, v) \operatorname{sen}(v) \\
&\overset{(49),(50)}{=} -2u \cos(v) \cos(v) - 2u \operatorname{sen}(v) \operatorname{sen}(v) = -2u, \\
\frac{\partial h}{\partial v}(u, v) &\overset{(47)}{=} \frac{\partial}{\partial u}[f(x(u, v), y(u, v))] \\
&\overset{\text{regra da cadeia}}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \\
&\overset{(51),(52),(54),(56)}{=} -2x(u, v) [-u \operatorname{sen}(v)] - 2y(u, v) [u \cos(v)] \\
&\overset{(49),(50)}{=} 2u^2 \cos(v) \operatorname{sen}(v) - 2u^2 \operatorname{sen}(v) \cos(v) = 0.
\end{aligned}$$

(b)

Se $f, x, y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são dadas por

$$f(x, y) \doteq 1 - x^2 - y^2, \quad \text{para} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \tag{57}$$

$$x(u, v) \doteq u - v, \tag{58}$$

$$y(u, v) \doteq u + v, \ \text{para} \ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \tag{59}$$

Então as funções f, x, y possuem derivadas parciais de 1.a ordem em $\mathbb{R}^2$ e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \overset{(57)}{=} -2x, \tag{60}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \overset{(57)}{=} -2y, \quad \text{para} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \tag{61}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \overset{(58)}{=} 1, \tag{62}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \overset{(58)}{=} -1, \tag{63}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \overset{(59)}{=} 1, \tag{64}$$

$$\frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \overset{(59)}{=} 1, \quad \text{para} \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2. \tag{65}$$

Logo, para $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial u}(u,v) &\overset{(57)}{=} \frac{\partial}{\partial u}[f(x(u,v),y(u,v))] \\
&\overset{\text{regra da cadeia}}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v))\,\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v))\,\frac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\
&\overset{(60),(61),(62),(64)}{=} -2\,x(u,v)\,1 - 2\,y(u,v)\,1 \\
&\overset{(58),(59)}{=} -2\,(u-v) - 2\,(u+v) = -2\,u + 2\,v - 2\,u - 2\,v = -4\,u\,, \\
\frac{\partial h}{\partial v}(u,v) &\overset{(57)}{=} \frac{\partial}{\partial u}[f(x(u,v),y(u,v))] \\
&\overset{\text{regra da cadeia}}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v))\,\frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v))\,\frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \\
&\overset{(60),(61),(63),(65)}{=} -2\,x(u,v)\,(-1) - 2\,y(u,v)\,1 \\
&\overset{(58),(59)}{=} 2\,(u-v) - 2\,(u+v) = -4\,v\,.
\end{aligned}
$$

(c)

Se $f, x, y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são dadas por

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &\doteq 1 - 4\,x^2 + 9\,y^2\,, \quad \text{para} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 && (66) \\
x(u,v) &\doteq 2\,u\,\cos(v)\,, && (67) \\
y(u,v) &\doteq 3\,u\,\text{sen}(v)\,, \ \text{para} \ (u,v) \in \mathbb{R}^2 && (68)
\end{aligned}
$$

Então as funções f, x, y possuem derivadas parciais de 1.a ordem em $\mathbb{R}^2$ e

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &\overset{(66)}{=} -8\,x\,, && (69) \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &\overset{(66)}{=} 18\,y\,, \quad \text{para} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 && (70) \\
\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) &\overset{(67)}{=} 2\,\cos(v)\,, && (71) \\
\frac{\partial x}{\partial v}(u,v) &\overset{(67)}{=} -2\,u\,\text{sen}(v)\,, && (72) \\
\frac{\partial y}{\partial u}(u,v) &\overset{(68)}{=} 3\,\text{sen}(v)\,, && (73) \\
\frac{\partial y}{\partial v}(u,v) &\overset{(68)}{=} 3\,u\,\cos(v)\,, \quad \text{para} \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2\,. && (74)
\end{aligned}
$$

Logo, para $(u\,,v) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial u}(u\,,v) &\overset{(57)}{=} \frac{\partial}{\partial u}[f(x(u\,,v)\,,y(u\,,v))] \\
&\overset{\text{regra da cadeia}}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x(u\,,v)\,,y(u\,,v))\,\frac{\partial x}{\partial u}(u\,,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u\,,v)\,,y(u\,,v))\,\frac{\partial y}{\partial u}(u\,,v) \\
&\overset{(69),(70),(71),(73)}{=} -8\,x(u\,,v)\,[2\,\cos(v)] + 18\,y(u\,,v)\,[3\,\text{sen}(v)] \\
&\overset{(67),(68)}{=} -8\,[2\,u\,\cos(v)]\,[2\,\cos(v)] + 18\,[3\,u\,\text{sen}(v)]\,[3\,\text{sen}(v)]\,, \\
&= -32\,u\,\cos^2(v) + 162\,u\,\text{sen}^2(v) \\
\frac{\partial h}{\partial v}(u\,,v) &\overset{(57)}{=} \frac{\partial}{\partial u}[f(x(u\,,v)\,,y(u\,,v))] \\
&\overset{\text{regra da cadeia}}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x(u\,,v)\,,y(u\,,v))\,\frac{\partial x}{\partial v}(u\,,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u\,,v)\,,y(u\,,v))\,\frac{\partial y}{\partial v}(u\,,v) \\
&\overset{(69),(61),(72),(73)}{=} -8\,x(u\,,v)\,[-2\,u\,\text{sen}(v)] + 18\,y(u\,,v)\,[3\,u\,\cos(v)] \\
&\overset{(67),(68)}{=} -8\,[2\,u\,\cos(v)]\,[-2\,u\,\text{sen}(v)] + 18\,[3\,u\,\text{sen}(v)]\,[3\,u\,\cos(v)] \\
&= 194\,u\,\text{sen}(v)\,\cos(v)\,.
\end{aligned}
$$

Exercício 10.

Lembremos, do Teorema 9.3.1, da página 281 das notas de aula, que se a função f possui derivadas parciais de 1.a ordem no seu domínio (que é um subconjunto aberto), P_o é um ponto do domínio da função f e o vetor $\vec{v_o}$ é **unitário**, então

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v_o}}(P_o) = \nabla f(P_o) \bullet \vec{v_o}\,. \tag{75}$$

(a)

Como $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é dada por

$$
\begin{aligned}
& f(x\,,y) \doteq x\,y - x + y\,, \quad \text{para} \quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,, && (76) \\
& P_o = (x_o\,,y_o) \doteq (1\,,1)\,, && (77) \\
\text{e} \quad & v \doteq (1\,,1)\,. && (78)
\end{aligned}
$$

então a f possui derivadas parciais de 1.a ordem em $\mathbb{R}^2$ e, para $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, temos:

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y) \overset{(76)}{=} y - 1\,, && (79) \\
& \frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y) \overset{(76)}{=} x + 1\,, && (80) \\
\text{logo:} \quad & \nabla f(x\,,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\,, \frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y)\right) \overset{(79),(80)}{=} (y - 1\,, x + 1)\,. && (81)
\end{aligned}
$$

Considerando-se

$$\vec{v_o} \doteq \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \overset{(78)}{=} \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}}\,(1\,,1) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(1\,,1)\,, \tag{82}$$

teremos que o vetor $\vec{v_o}$ tem a mesma direção e sentido do vetor $\vec{v}$ e é unitário.

Logo, do Teorema 9.3.1, da página 281 das notas de aula, segue que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_o) = \frac{\partial f}{\partial \vec{v_o}}(P_o) \overset{\text{Teorema 9.3.1}}{=} \nabla f(P_o) \bullet \vec{v_o} \overset{(81),(82)}{=} (y_o - 1 \,, x_o + 1) \bullet \frac{\sqrt{2}}{2}\,(1\,,1)$$
$$\overset{(77)}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} \underbrace{(1-1\,,1+1)}_{=(0\,,2)} \bullet (1\,,1) = \sqrt{2}\,.$$

(b)

Como $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é dada por

$$f(x\,,y) \doteq \ln\left(x^2 + y^2 + 4\right)\,, \quad \text{para} \quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,, \tag{83}$$
$$P_o = (x_o\,,y_o) \doteq (1\,,0)\,, \tag{84}$$
$$\text{e} \quad v \doteq \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\,,\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\,. \tag{85}$$

então a f possui derivadas parciais de 1.a ordem em $\mathbb{R}^2$ e, para $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y) \overset{(83)}{=} \frac{1}{x^2 + y^2 + 4}\,2\,x\,, \tag{86}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y) \overset{(83)}{=} \frac{1}{x^2 + y^2 + 4}\,2\,y\,, \tag{87}$$
$$\text{logo:} \quad \nabla f(x\,,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\,,\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y)\right) \overset{(86),(87)}{=} \left(\frac{2\,x}{x^2 + y^2 + 4}\,,\frac{2\,y}{x^2 + y^2 + 4}\right)\,. \tag{88}$$

Notemos que

$$\|\vec{v}\| \overset{(85)}{=} \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{4}{5}} = 1\,, \tag{89}$$

ou seja, o vetor $\vec{v}$ é unitário.

Logo, do Teorema 9.3.1, da página 281 das notas de aula, segue que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_o) \overset{\text{Teorema 9.3.1}}{=} \nabla f(P_o) \bullet \vec{v} \overset{(88),(85)}{=} \left(\frac{2\,x_o}{x_o^2 + y_o^2 + 4}\,,\frac{2\,y_o}{x_o^2 + y_o^2 + 4}\right) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\,,\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$
$$\overset{(84)}{=} \left(\frac{2}{1^2 + 0^2 + 4}\,,\frac{2 \cdot 0}{1^2 + 0^2 + 4}\right) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\,,\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2}{4\,\sqrt{5}}\,.$$

(c)

Como $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é dada por

$$f(x\,,y\,,z) \doteq \frac{x - e^y}{x^2 + y^4 + 1}\,, \quad \text{para} \quad (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,, \tag{90}$$
$$P_o = (x_o\,,y_o\,,z_o) \doteq (1\,,1\,,0)\,, \tag{91}$$
$$\text{e} \quad v \doteq (2\,,2\,,0)\,. \tag{92}$$

então a f possui derivadas parciais de 1.a ordem em $\mathbb{R}^3$ e, para $(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3$, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y\,,z) \overset{(90)}{=} \frac{1 \cdot (x^2+y^4+1) - (x-e^y)\,2\,x}{(x^2+y^4+1)^2}\,, \tag{93}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y\,,z) \overset{(90)}{=} \frac{-e^y\,(x^2+y^4+1) - (x-e^y)\,4\,y^3}{(x^2+y^4+1)^2}\,, \tag{94}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x\,,y\,,z) \overset{(90)}{=} 0\,, \tag{95}$$

$$\text{logo:}\quad \nabla f(x\,,y\,,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y\,,z)\,,\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y\,,z)\,,\frac{\partial f}{\partial z}(x\,,y\,,z)\right)$$

$$\overset{(93),(94),(95)}{=} \left(\frac{x^2+y^4+1-2\,x\,(x-e^y)}{(x^2+y^4+1)^2}\,,\ \frac{-e^y\,(x^2+y^4+1)-4\,y^3\,(x-e^y)}{(x^2+y^4+1)^2}\,,0\right). \tag{96}$$

Notemos que

$$\vec{v_o} \doteq \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \overset{(92)}{=} \frac{1}{\sqrt{2^2+2^2+0^2}}\,(2\,,2\,,0) = \frac{\sqrt{2}}{4}\,(2\,,2\,,0)\,, \tag{97}$$

e o vetor $\vec{v_o}$ é um vetor que tem a mesma direção e sentido do vetor $\vec{v}$ e é unitário.

Logo, do Teorema 9.3.1, da página 281 das notas de aula, segue que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_o) \overset{\text{Teorema 9.3.1}}{=} \nabla f(P_o) \bullet \frac{\sqrt{2}}{4}\,(2\,,2\,,0)$$

$$\overset{(96),(97)}{=} \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{x_o^2+y_o^4+1-2\,x_o\,(x_o-e^{y_o})}{(x_o^2+y_o^4+1)^2}\,,\ \frac{-e^{y_o}\,(x_o^2+y_o^4+1)-4\,y_o^3\,(x_o-e^{y_o})}{(x_o^2+y_o^4+1)^2}\,,0\right) \bullet (2\,,2\,,0)$$

$$= \frac{1^2+1^4+1-2\cdot 1\cdot(1-e^1)}{(1^2+1^4+1)^2}\,2 + \frac{-e^1\,(1^2+1^4+1)-4\cdot 1^3\,(1-e^1)}{(1^2+1^4+1)^2}\,2 = \frac{-6+6\,e}{\sqrt{3}}\,.$$

Exercício 11.

(a)

Temos que

$$P_o = (1\,,2) \tag{98}$$

e a curva é dada pela equação

$$x^2 + x\,y + y^2 - 3\,y = 1\,. \tag{99}$$

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x\,,y) \doteq x^2 + x\,y + y^2 - 3\,y - 1\,,\quad \text{para}\quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,. \tag{100}$$

então a função f tem derivadas parciais de 1.a ordem contínuas em $\mathbb{R}^2$ (pois é uma função polinomial) e para $(x\,,y) \in R^2$, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y) \overset{(100)}{=} 2\,x + y\,, \tag{101}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y) \overset{(100)}{=} x + 2\,y - 3\,, \tag{102}$$

$$\text{logo:}\quad \nabla f(x\,,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\,,\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y)\right)$$

$$\overset{(101),(102)}{=} (2\,x+y\,,x+2\,y-3)\,, \tag{103}$$

$$\text{logo :}\quad \nabla f(P_o)) \overset{(98)}{=} \nabla f(1\,,2) \overset{(102)}{=} (2\cdot 1+2\,,1+2\cdot 2-3) = (4\,,2) \neq (0\,,0)\,. \tag{104}$$

Notemos que o traço da curva de nível zero associada a função f coincide com o traço da curva de equação (99).

Logo, pela Proposição 9.2.1, da página 269 das notas de aula, temos que o vetor não nulo $\nabla f(P_o))$ é um vetor normal a curva de equação (99) (que é a curva de nível zero da função f) que contém o ponto P_o, ou seja, a equação geral da reta normal a curva

$$
\begin{aligned}
&4\,x + 2\,y = c\,. &&(105)\\
&\text{Como } P_o = (1\,,2) \text{ pertence à reta acima, teremos:}\\
&c = 4\cdot 1 + 2\cdot 2 = 8\,,
\end{aligned}
$$

logo a equação geral da reta normal à curva de equação (99) no ponto $P_o = (1\,,2)$ será:

$$4\,x + 2\,y = 8\,.$$

Como o vetor $\nabla f(P_o)$ é um vetor normal à curva de equação (99) no ponto $P_o = (1\,,2)$, se

$$n(P_o) \doteq (a\,,b) \neq (0\,,0) \tag{106}$$

é um vetor tangente à curva de equação (99) no ponto $P_o = (1\,,2)$, da Geometria Analítica, devemos ter

$$
\begin{aligned}
&0 = n(P_o) \bullet \nabla f(P_o) \overset{(104),(106)}{=} (a\,,b) \bullet (4\,,2) = 4\,a + 2\,b\,,\\
&\text{Logo, se } \ a = 1\,, \text{segue que } \ b = -2\,,\\
&\text{ou seja, } \ n(P_o) = (1\,,-2) \neq (0\,,0) &&(107)
\end{aligned}
$$

é um vetor tangente à curva de equação (99) no ponto $P_o = (1\,,2)$.

Logo a equação geral da reta tangente a curva será dada por

$$
\begin{aligned}
&1\cdot x + (-2)\cdot y = d\,. &&(108)\\
&\text{Como } P_o = (1\,,2) \text{ pertence à reta acima, teremos:}\\
&d = 1 - 2\cdot 2 = -3\,,
\end{aligned}
$$

logo a equação geral da reta tangente à curva de equação (99) no ponto $P_o = (1\,,2)$ será:

$$x - 2\,y = -3\,.$$

(b)

Temos que

$$P_o = (0\,,2) \tag{109}$$

e a curva é dada pela equação

$$y - e^{x^2} = 1\,. \tag{110}$$

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x\,,y) \doteq y - e^{x^2} - 1\,, \quad \text{para} \quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,. \tag{111}$$

então a função f tem derivadas parciais de 1.a ordem contínuas em $\mathbb{R}^2$ (pois é uma função polinomial) e para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \overset{(111)}{=} -e^{x^2}(2x) = -2x\,e^{x^2}, \tag{112}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \overset{(111)}{=} 1, \tag{113}$$
$$\text{logo:} \quad \nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)$$
$$\overset{(112),(113)}{=} \left(-2x\,e^{x^2}, 1\right), \tag{114}$$
$$\text{logo :} \quad \nabla f(P_o)) \overset{(109)}{=} \nabla f(0, 2) \overset{(114)}{=} \left(-2 \cdot 0 \cdot e^{0^2}, 1\right) = (0, 1) \neq (0, 0). \tag{115}$$

Notemos que o traço da curva de nível zero associada a função f coincide com o traço da curva de equação (99).

Logo, pela Proposição 9.2.1, da página 269 das notas de aula, temos que o vetor não nulo $\nabla f(P_o))$ é um vetor normal a curva de equação (110) (que é a curva de nível zero da função f) que contém o ponto P_o, ou seja, a equação geral da reta normal a curva

$$0 \cdot x + 1 \cdot y = c, \text{ ou seja } y = c. \tag{116}$$
Como $P_o = (0, 2)$ pertence à reta acima, teremos:
$$c = 2,$$

logo a equação geral da reta normal à curva de equação (110) no ponto $P_o = (0, 2)$ será:

$$y = 2.$$

Como o vetor $\nabla f(P_o)$ é um vetor normal à curva de equação (110) no ponto $P_o = (0, 2)$, o vetor

$$n(P_o) \doteq (1, 0) \neq (0, 0) \tag{117}$$

será um vetor tangente à curva de equação (110) no ponto $P_o = (0, 2)$, da Geometria Analítica, devemos ter

Logo a equação geral da reta tangente a curva será dada por

$$1 \cdot x + 0 \cdot y = d, \quad \text{ou seja, } x = d.$$
Como $P_o = (0, 2)$ pertence à reta acima, teremos:
$$d = 0,$$

logo a equação geral da reta tangente à curva de equação (110) no ponto $P_o = (0, 2)$ será:

$$x = 0.$$

Exercício 12.

Temos que a curva é dada pela equação

$$x^2 - y^2 = 1. \tag{118}$$

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) \doteq x^2 - y^2 - 1, \quad \text{para} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{119}$$

então a função f tem derivadas parciais de 1.a ordem contínuas em $\mathbb{R}^2$ (pois é uma função polinomial) e para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \overset{(118)}{=} 2x, \tag{120}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \overset{(118)}{=} -2y, \tag{121}$$

$$\text{logo:} \quad \nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) \overset{(120),(121)}{=} (2x, -2y). \tag{122}$$

Notemos que o traço da curva de nível zero associada a função f coincide com o traço da curva de equação (119).

Logo, pela Proposição 9.2.1, da página 269 das notas de aula, temos que o vetor não nulo $\nabla f(P))$ é um vetor normal a curva de equação (110) (que é a curva de nível zero da função f) que contém o ponto P_o.

Notemos que um vetor normal à reta

$$y = 2x, \text{ ou seja, } 2x - y = 0, \tag{123}$$

será o vetor (não nulo)

$$\vec{n} \doteq (2, -1), \tag{124}$$

Para que a reta tangente à curva (118) em um ponto seja paralela a reta de equação (123), basta que os vetores normais a cada uma delas sejam paralelos, ou seja, podemos encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$, de modo que

$$\nabla f(x_o, y_o) = \lambda \vec{n},$$

que, de (121) e (123), nos fornece:

$$(2x_o, -2y_o) = \lambda(2, -1) \tag{125}$$

e o ponto (x_o, y_o) deve pertencer a curva (118).

Portanto deveremos ter:

$$\begin{cases} 2x_o = \lambda 2 \\ -2y_o = \lambda(-1) \\ x_o^2 - y_o^2 = 1 \end{cases}, \text{ ou seja, } \begin{cases} x_o = \lambda \\ y_o = \dfrac{\lambda}{2} \\ x_o^2 - y_o^2 = 1 \end{cases} \quad \text{assim} \quad \begin{cases} x_o = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ y_o = \dfrac{2\sqrt{3}}{6} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x_o = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ y_o = -\dfrac{2\sqrt{3}}{6} \end{cases}. \tag{126}$$

Portanto os pontos pertencentes a curva de equação (118) cuja reta tangente a mesma nesses pontos, são paralelas a reta de equação geral (122) serão os pontos:

$$P_1 \doteq \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{6}\right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{6}\right).$$

Exercício 13.

(a)

Temos que a superfície é dada pela equação

$$x + y^2 + z = 4\,. \tag{127}$$

Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x\,,y\,,z) \doteq x + y^2 + z - 4\,, \quad \text{para} \quad (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,. \tag{128}$$

então a função f tem derivadas parciais de 1.a ordem contínuas em $\mathbb{R}^3$ (pois é uma função polinomial) e para $(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3$, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y\,,z) \overset{(128)}{=} 1\,, \tag{129}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y\,,z) \overset{(128)}{=} 2y\,, \tag{130}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x\,,y\,,z) \overset{(128)}{=} 1\,, \tag{131}$$

$$\begin{aligned} \text{logo:} \quad \nabla f(x\,,y\,,z) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y\,,z)\,, \frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y\,,z)\,, \frac{\partial f}{\partial z}(x\,,y\,,z) \right) \\ &\overset{(129),(130),(131)}{=} (1\,,2y\,,1)\,. \end{aligned} \tag{132}$$

Sendo

$$P_o = (x_o\,,y_o\,,z_o) \doteq (1\,,1\,,2) \tag{133}$$

da Proposição 10.2.1, da página 298 das notas de aula, temos que o vetor

$$\nabla(P_o) \overset{(132)}{=} (1\,,2y_o\,,1) \overset{(133)}{=} (1\,,2\,,1)\,, \tag{134}$$

será um vetor normal à superfície de equação (127), logo a equação geral do plano tangente à superfície de equação (127) será do tipo

$$1 \cdot x + 2 \cdot y + 1 \cdot z = d\,, \quad \text{ou seja} \quad x + 2y + z = d\,. \tag{135}$$

Como o ponto P_o, dado por (133), de pertencer a tal plano, deveremos ter

$$1 + 2 \cdot 1 + 2 = d\,, \ \text{isto é} \ \ d = 5\,. \tag{136}$$

Substituindo-se este valor em (135), teremos que a equação do plano tangente à superfície de equação (127) no ponto P_o será dada por

$$x + 2y + z = 5\,.$$

(b)

Temos que a superfície é dada pela equação

$$x^3 + y^3 + z^3 = 10\,. \tag{137}$$

Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x\,,y\,,z) \doteq x^3 + y^3 + z^3 - 10\,, \quad \text{para} \quad (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,. \tag{138}$$

então a função f tem derivadas parciais de 1.a ordem contínuas em $\mathbb{R}^3$ (pois é uma função polinomial) e para $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \overset{(138)}{=} 3x^2, \tag{139}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \overset{(138)}{=} 3y^2, \tag{140}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \overset{(138)}{=} 3y^2, \tag{141}$$

$$\text{logo:} \quad \nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)\right)$$

$$\overset{(139),(140),(141)}{=} \left(3x^2, 3y^2, 3z^2\right). \tag{142}$$

Sendo

$$P_o = (x_o, y_o, z_o) \doteq (1, 1, 2) \tag{143}$$

da Proposição 10.2.1, da página 298 das notas de aula, temos que o vetor

$$\nabla(P_o) \overset{(142)}{=} \left(3x_o^2, 3y_o^2, 3z_o^2\right) \overset{(143)}{=} \left(3 \cdot 1^2, 3 \cdot 1^2, 3 \cdot 2^2\right) = (3, 3, 12), \tag{144}$$

será um vetor normal à superfície de equação (137), logo a equação geral do plano tangente à superfície de equação (137) será do tipo

$$3 \cdot x + 3 \cdot y + 12 \cdot z = d, \quad \text{ou seja} \quad 3x + 3y + 12z = d. \tag{145}$$

Como o ponto P_o, dado por (133), de pertencer a tal plano, deveremos ter

$$3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 12 \cdot 2 = d, \quad \text{isto é} \quad d = 30.$$

Substituindo-se este valor em (145), teremos que a equação do plano tangente à superfície de equação (127) no ponto P_o será dada por

$$3x + 3y + 12z = 30.$$

Exercício 14.

Temos que a superfície é dada pela equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \tag{146}$$

Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y, z) \doteq x^2 + y^2 + z^2 - 1, \quad \text{para} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \tag{147}$$

então a função f tem derivadas parciais de 1.a ordem contínuas em $\mathbb{R}^3$ (pois é uma função polinomial) e para $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \overset{(146)}{=} 2x, \tag{148}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \overset{(146)}{=} 2y, \tag{149}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \overset{(146)}{=} 2y, \tag{150}$$

$$\text{logo:} \quad \nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)\right)$$

$$\overset{(148),(149),(150)}{=} (2x, 2y, 2z). \tag{151}$$

Sendo

$$P_o = (x_o\,,y_o\,,z_o) \tag{152}$$

da Proposição 10.2.1, da página 298 das notas de aula, temos que o vetor

$$\nabla(P_o) \overset{(151)}{=} (2\,x_o\,,2\,y_o\,,2\,z_o)\ , \tag{153}$$

será um vetor normal à superfície de equação (146).

Notemos que o plano

$$3\,x - y + z = 7 \tag{154}$$

tem como um vetor normal o vetor (não nulo)

$$\vec{n} \doteq (3\,,-1\,,1)\,. \tag{155}$$

Como o plano tangente a superfície de equação (146) deve ser paralelo ao plano de equação geral (154), ou seja, podemos encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\nabla(P_o) = \lambda\,\vec{n}\,, \quad \text{ou seja,} \quad (2\,x_o\,,2\,y_o\,,2\,z_o) = \lambda\,(3\,,-1\,,1)\,,$$
$$\text{ou seja,} \quad \begin{cases} 2\,x_o = 3\,\lambda \\ 2\,y_o = -\lambda \\ 2\,z_o = \lambda \end{cases}\,. \tag{156}$$

Como $P_o = (x_o\,,y_o\,,z_o)$ deve pertencer à superfície de equação (146), deveremos também ter

$x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 = 1\,,$

que, juntamente (156), devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} 2\,x_o = 3\,\lambda \\ 2\,y_o = -\lambda \\ 2\,z_o = \lambda \\ x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 = 1 \end{cases}\,, \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} x_o = \dfrac{3\,\lambda}{2} \\ y_o = -\dfrac{\lambda}{2} \\ z_o = \dfrac{\lambda}{2} \\ x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 = 1 \end{cases}\,, \quad \text{ou ainda:} \quad \begin{cases} x_o = \dfrac{3\,\sqrt{11}}{11} \\ y_o = -\dfrac{\sqrt{11}}{11} \\ z_o = \dfrac{\sqrt{11}}{11} \\ \lambda = -\frac{2\,\sqrt{11}}{11} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x_o = -\dfrac{3\,\sqrt{11}}{11} \\ y_o = \dfrac{\sqrt{11}}{11} \\ z_o = -\dfrac{\sqrt{11}}{11} \\ \lambda = -\frac{2\,\sqrt{11}}{11} \end{cases}$$

Portanto nos pontos

$$P_1 \doteq \left(\frac{3\,\sqrt{11}}{11}\,,-\frac{\sqrt{11}}{11}\,,\frac{\sqrt{11}}{11}\right) \quad \text{e} \ P_2 \doteq \left(-\frac{3\,\sqrt{11}}{11}\,,\frac{\sqrt{11}}{11}\,,-\frac{\sqrt{11}}{11}\right)$$

o plano tangente à superfície de equação (146) nesses pontos será paralelo ao plano de equação geral (154).