9.a Lista - SMA0354 - Cálculo II - Exercícios resolvidos selecionados

1.o semestre de 2020

Exercício 1:

Lembrando que uma função $w \in C^2(\Omega\,;\,\mathbb{R})$, onde o conjunto $\underline{\Omega}$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$, é dita **harmônica** me Ω, se

$$\Delta w(x\,,y) \doteq \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x\,,y) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x\,,y) = 0 \quad \text{para} \quad (x\,,y) \in \Omega.$$

Por hipótese, para $(x\,,y) \in \Omega$, temos

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x\,,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x\,,y) \tag{1}$$

$$\text{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x\,,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x\,,y\,. \tag{2}$$

Derivando a equação parcialmente, em relação à x, obteremos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x\,,y) = \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}(x\,,y)\,. \tag{3}$$

Derivando a equação parcialmente, em relação à y, obteremos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x\,,y) = -\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}(x\,,y) \overset{\text{Teorema de Schwarz}}{=} -\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}(x\,,y)\,. \tag{4}$$

Somando-se as equações (3) e (4), obteremos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x\,,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x\,,y) = \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}(x\,,y) - \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}(x\,,y) = 0\,.$$

finalizando a resolução.

Exercício 2:

Notemos que para $(r\,,\theta) \in (0\,,\infty) \times \mathbb{R}$, temos

$$\begin{cases} x \doteq r\,\cos(\theta) \\ y \doteq r\,\text{sen}(\theta) \end{cases}\,, \tag{5}$$

$$v(r\,,\theta) = u(x\,,y) \overset{(5)}{=} u(r\,\cos(\theta)\,,r\,\text{sen}(\theta))\,,$$

e podemos aplicar a regra da cadeia para obtermos a identidade

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x\,,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x\,,y) = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r\,,\theta) + \frac{1}{r}\,\frac{\partial v}{\partial r}(r\,,\theta) + \frac{1}{r}\,\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(r\,,\theta)\,.$$

Exercício 3:

item (a):

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x\,,y) \doteq x^2 + 3\,x\,y + 4\,y^2 - 6\,x + 2\,y\,,\ \text{para } (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,. \tag{6}$$

Notemos que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ e além disso:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y) \overset{(6)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left[x^2 + 3\,x\,y + 4\,y^2 - 6\,x + 2\,y\right] = 2\,x + 3\,y - 6 \tag{7}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y) \overset{(6)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left[x^2 + 3\,x\,y + 4\,y^2 - 6\,x + 2\,y\right] = 3\,x + 8\,y + 2 \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\right] \overset{(7)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left[2\,x + 3\,y - 6\right] = 2 \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y)\right] \overset{(8)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left[3\,x + 8\,y + 2\right] = 8 \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x\,,y) \overset{\text{Teor. de Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\right] \overset{(7)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left[2\,x + 3\,y - 6\right] = 3 \tag{11}$$

Procuremos os pontos críticos da função f em $\mathbb{R}^2$, ou seja, se $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$(0\,,0) = \nabla f(x\,,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\,,\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y)\right) \overset{(7)\text{ e }(8)}{=} (2\,x + 3\,y - 6\,, 3\,x + 8\,y + 2)$$

$$\text{ou seja, } \begin{cases} 2\,x + 3\,y - 6 = 0 \\ 3\,x + 8\,y + 2 = 0 \end{cases}\,, \text{ ou ainda: } \begin{cases} x = \dfrac{12}{7} \\ y = \dfrac{22}{7} \end{cases} \tag{12}$$

Logo o único ponto crítico da função f em $\mathbb{R}^2$ é o ponto

$$P_o \doteq \left(\frac{12}{7}\,,\frac{22}{7}\right)\,. \tag{13}$$

Aplicarmos o teste do hessiano para classificar o ponto crítico P_o.
Notemos que a matriz hessiana da função em $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, será dada por

$$\text{Hess}_f(x\,,y) \doteq \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x\,,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x\,,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x\,,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x\,,y) \end{pmatrix} \overset{(9),(10),(11)}{=} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\,, \tag{14}$$

$$\text{logo hess}_f(x\,,y) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 7. \tag{15}$$

Logo do teste do hessiano, como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_o) \overset{(9)}{=} 2 > 0\,,$$

$$\text{e} \quad \text{hess}_f(P_o) \overset{(15)\text{ e }(13)}{=} 7 > 0\,,$$

segue que a função f tem um ponto de mínimo local no ponto $P_o \doteq \left(\dfrac{12}{7}\,,\dfrac{22}{7}\right)$.

item (b):

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x\,,y) \doteq x^3 + 2\,x\,y + y^2 - 5\,x\,, \text{ para } (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,. \tag{16}$$

Notemos que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2\,;\,\mathbb{R})$ e além disso:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y) \overset{(16)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left[x^3 + 2\,x\,y + y^2 - 5\,x\right] = 3\,x^2 + 2\,y - 5 \tag{17}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y) \overset{(16)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left[x^3 + 2\,x\,y + y^2 - 5\,x\right] = 2\,x + 2\,y \tag{18}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\right] \overset{(17)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left[3\,x^2 + 2\,y - 5\right] = 6\,x \tag{19}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y)\right] \overset{(18)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left[2\,x + 2\,y\right] = 2 \tag{20}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x\,,y) \overset{\text{Teor. de Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\right] \overset{(17)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left[3\,x^2 + 2\,y - 5\right] = 2 \tag{21}$$

Procuremos os pontos críticos da função f em $\mathbb{R}^2$, ou seja, se $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$(0\,,0) = \nabla f(x\,,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\,,\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y)\right) \overset{(17) \text{ e } (18)}{=} \left(3\,x^2 + 2\,y - 5\,,2\,x + 2\,y\right)$$

$$\text{ou seja, } \begin{cases} 3\,x^2 + 2\,y - 5 = 0 \\ 2\,x + 2\,y = 0 \end{cases}, \text{ ou ainda: } \begin{cases} x_1 = \dfrac{5}{3}\,, \text{ e assim } y_1 = -\dfrac{5}{3} \\ \text{ou } \; x_2 = -1\,, \text{ e assim } y_2 = 1 \end{cases} \tag{22}$$

Logo os dois únicos pontos críticos da função f em $\mathbb{R}^2$ são o ponto

$$P_1 \doteq \left(\frac{5}{3}\,,-\frac{5}{3}\right) \quad \text{e} \quad P_2 \doteq (-1\,,1)\;. \tag{23}$$

Aplicaremos o teste do hessiano para classificar os pontos críticos P_1 e P_2.
Notemos que a matriz hessiana da função em $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, será dada por

$$\operatorname{Hess}_f(x\,,y) \doteq \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x\,,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x\,,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x\,,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x\,,y) \end{pmatrix} \overset{(19),(20),(21)}{=} \begin{pmatrix} 6\,x & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \tag{24}$$

$$\text{logo } \operatorname{hess}_f(x\,,y) = 12\,x - 4\,. \tag{25}$$

Logo, aplicando o teste do hessiano ao ponto P_1, teremos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_1) \overset{(19)}{=} 2 > 0\,,$$

$$\text{e} \quad \operatorname{hess}_f(P_1) \overset{(25) \text{ e } (23)}{=} 12 \cdot \frac{5}{3} - 4 = 16 > 0\,,$$

segue que a função f tem um ponto de mínimo local no ponto $P_1 \doteq \left(\dfrac{5}{3}\,,-\dfrac{5}{3}\right)$.

Logo, aplicando o teste do hessiano ao ponto P_2, teremos:

$$\operatorname{hess}_f(P_1) \overset{(25) \text{ e } (23)}{=} 12 \cdot (-1) - 4 = -16 < 0\,,$$

segue que a função f tem um ponto de sela no ponto $P_2 \doteq (1\,,-1)$.

item (c):

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x\,,y) \doteq x^5 + y^5 - 5\,x - 5\,y\,, \text{ para } (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,. \tag{26}$$

Notemos que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2\,;\,\mathbb{R})$ e além disso:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y) \overset{(26)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left[x^5 + y^5 - 5\,x - 5\,y\right] = 5\,x^4 - 5 \tag{27}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y) \overset{(26)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left[x^5 + y^5 - 5\,x - 5\,y\right] = 5\,y^4 - 5 \tag{28}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\right] \overset{(27)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left[5\,x^4 - 5\right] = 20\,x^3 \tag{29}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y)\right] \overset{(28)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left[5\,y^4 - 5\right] = 20\,y^3 \tag{30}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x\,,y) \overset{\text{Teor. de Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\right] \overset{(27)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left[5\,x^4 - 5\right] = 0 \tag{31}$$

Procuremos os pontos críticos da função f em $\mathbb{R}^2$, ou seja, se $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$(0\,,0) = \nabla f(x\,,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\,, \frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y)\right) \overset{(27)\text{ e }(28)}{=} \left(5\,x^4 - 5\,, 5\,y^4 - 5\right)$$

ou seja, $\begin{cases} 5\,x^4 - 5 = 0 \\ 5\,x^4 - 5 = 0 \end{cases}$, ou ainda: $\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$.

Logo os quatro únicos pontos críticos da função f em $\mathbb{R}^2$ são o ponto

$$P_1 \doteq (1\,,1)\,,\ P_2 \doteq (1\,,-1)\,,\ P_3 \doteq (-1\,,1) \text{ e } P_4 \doteq (-1\,,-1)\,. \tag{32}$$

Aplicaremos o teste do hessiano para classificar os pontos críticos P_1, P_2, P_3 e P_4.
Notemos que a matriz hessiana da função em $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, será dada por

$$\mathrm{Hess}_f(x\,,y) \doteq \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x\,,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x\,,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x\,,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x\,,y) \end{pmatrix} \overset{(29),(30),(31)}{=} \begin{pmatrix} 20\,x^3 & 0 \\ 0 & 20\,y^3 \end{pmatrix}, \tag{33}$$

$$\text{logo } \mathrm{hess}_f(x\,,y) = 400\,x^3\,y^3\,. \tag{34}$$

Logo, aplicando o teste do hessiano ao ponto P_1, teremos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_1) \overset{(29)\text{ e }(32)}{=} 20 \cdot 1^3 = 20 > 0\,,$$

$$\text{e}\quad \mathrm{hess}_f(P_1) \overset{(32)}{=} \mathrm{hess}_f(1\,,1) \overset{(34)}{=} 400 > 0\,,$$

segue que a função f tem um ponto de mínimo local no ponto $P_1 \doteq (1\,,-1)$.

Logo, aplicando o teste do hessiano ao ponto P_2, teremos:

$$\mathrm{hess}_f(P_2) \overset{(32)}{=} \mathrm{hess}_f(1\,,-1) \overset{(34)}{=} 400 \cdot 1^3 \cdot (-1)^3 = -400 < 0\,,$$

segue que a função f tem um ponto de sela no ponto $P_2 \doteq (1\,,-1)$.

Aplicando-se o teste do hessiano ao ponto P_3, teremos:

$$\mathrm{hess}_f(P_3) \overset{(32)}{=} \mathrm{hess}_f(1\,,-1) \overset{(34)}{=} 400\cdot(-1)^3\cdot 1^3 = -400 < 0\,,$$

segue que a função f tem um ponto de sela no ponto $P_3 \doteq (1\,,-1)$.

Finalmente, aplicando o teste do hessiano ao ponto P_3, teremos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_1) \overset{(29)\,\mathrm{e}\,(32)}{=} 20\cdot(-1)^3 = -20 < 0\,,$$

$$\text{e}\quad \mathrm{hess}_f(P_1) \overset{(32)}{=} \mathrm{hess}_f(-1\,,-1) \overset{(34)}{=} 400\cdot(-1)^3\cdot(-1)^3 = 400 > 0\,,$$

segue que a função f tem um ponto de máximo local no ponto $P_1 \doteq (1\,,-1)$.

item (d):

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x\,,y) \doteq 18\,x^2 - 32\,y^2 - 36\,x - 128\,y - 110\,,\ \text{para}\ (x\,,y)\in\mathbb{R}^2\,. \tag{35}$$

Notemos que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2\,;\mathbb{R})$ e além disso:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y) \overset{(35)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left[18\,x^2 - 32\,y^2 - 36\,x - 128\,y - 110\right] = 36\,x - 36 \tag{36}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y) \overset{(6)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left[18\,x^2 - 32\,y^2 - 36\,x - 128\,y - 110\right] = -64\,y - 128 \tag{37}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\right] \overset{(36)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left[36\,x - 36\right] = 36 \tag{38}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y)\right] \overset{(37)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left[-64\,y - 64\right] = -64 \tag{39}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x\,,y) \overset{\text{Teor. de Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\right] \overset{(36)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left[36\,x - 36\right] = 0 \tag{40}$$

Procuremos os pontos críticos da função f em $\mathbb{R}^2$, ou seja, se $(x\,,y)\in\mathbb{R}^2$, temos

$$(0\,,0) = \nabla f(x\,,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\,,\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y)\right) \overset{(36)\,\mathrm{e}\,(37)}{=} (36\,x - 36\,,-64\,y - 64)$$

$$\text{ou seja,}\ \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases},\ \text{ou ainda:}\ \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Logo o único ponto crítico da função f em $\mathbb{R}^2$ é o ponto

$$P_o \doteq (1\,,-1)\,. \tag{41}$$

Aplicarmos o teste do hessiano para classificar o ponto crítico P_o.

Notemos que a matriz hessiana da função em $(x\,,y)\in\mathbb{R}^2$, será dada por

$$\mathrm{Hess}_f(x\,,y) \doteq \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x\,,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x\,,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x\,,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x\,,y) \end{pmatrix} \overset{(38),(39),(40)}{=} \begin{pmatrix} 36 & 0 \\ 0 & -64 \end{pmatrix}\,, \tag{42}$$

$$\text{logo}\ \mathrm{hess}_f(x\,,y) = \begin{vmatrix} 36 & 0 \\ 0 & -64 \end{vmatrix} = -2304\,. \tag{43}$$

Logo do teste do hessiano, como

$$\text{hess}_f(P_o) \overset{(43) \text{ e } (41)}{=} -2304 < 0\,,$$

segue que a função f tem um ponto de sela no ponto $P_o \doteq (1\,,-1)$.

item (e):

Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x\,,y) \doteq (x-1)^2 + 2\,y^2\,, \text{ para } (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,. \tag{44}$$

Notemos que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2\,;\mathbb{R})$ e além disso:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y) \overset{(44)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left[(x-1)+2\,y^2\right] = 2\,(x-1) \tag{45}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y) \overset{(44)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left[(x-1)+2\,y^2\right] = 2\,y \tag{46}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\right] \overset{(45)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\,[2\,(x-1)] = 2 \tag{47}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y)\right] \overset{(46)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\,[2\,y] = 2 \tag{48}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x\,,y) \overset{\text{Teor. de Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\right] \overset{(45)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\,[2\,(x-1)] = 0 \tag{49}$$

Procuremos os pontos críticos da função f em $\mathbb{R}^2$, ou seja, se $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$(0\,,0) = \nabla f(x\,,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\,,\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y)\right) \overset{(45) \text{ e } (46)}{=} (2\,(x-1)\,,2\,y)$$

ou seja, $\begin{cases} 2\,(x-1) = 0 \\ 2\,y = 0 \end{cases}$, ou ainda: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

Logo o único ponto crítico da função f em $\mathbb{R}^2$ é o ponto

$$P_o \doteq (1\,,0)\,. \tag{50}$$

Aplicarmos o teste do hessiano para classificar o ponto crítico P_o.
Notemos que a matriz hessiana da função em $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, será dada por

$$\text{Hess}_f(x\,,y) \doteq \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x\,,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x\,,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x\,,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x\,,y) \end{pmatrix} \overset{(38),(39),(40)}{=} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\,, \tag{51}$$

$$\text{logo } \text{hess}_f(x\,,y) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4\,. \tag{52}$$

Logo do teste do hessiano, aplicado ao ponto P_o,como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_o) \overset{(47) \text{ e } (50)}{=} 2 > 0$$

$$\text{e} \quad \text{hess}_f(P_o) \overset{(52) \text{ e } (50)}{=} 4 > 0\,,$$

segue que a função f tem um ponto de mínimo no ponto $P_o \doteq (1\,,0)$.

item (f):

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x, y) \doteq x^2 + x\,y + y^2 - 2\,x - y\,, \text{ para } (x, y) \in \mathbb{R}^2\,. \tag{53}$$

Notemos que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ e além disso:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \overset{(53)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left[x^2 + x\,y + y^2 - 2\,x - y\right] = 2\,x + y - 2 \tag{54}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \overset{(53)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left[x^2 + x\,y + y^2 - 2\,x - y\right] = x + 2\,y - 1 \tag{55}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right] \overset{(54)}{=} \frac{\partial}{\partial x}[2\,x + y - 2] = 2 \tag{56}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right] \overset{(55)}{=} \frac{\partial}{\partial y}[x + 2\,y - 1] = 2 \tag{57}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x, y) \overset{\text{Teor. de Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right] \overset{(54)}{=} \frac{\partial}{\partial y}[2\,x + y - 2] = 1 \tag{58}$$

Procuremos os pontos críticos da função f em $\mathbb{R}^2$, ou seja, se $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$(0, 0) = \nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) \overset{(54) \text{ e } (55)}{=} (2\,x + y - 2, x + 2\,y - 1)$$

ou seja, $\begin{cases} 2\,x + y - 2 = 0 \\ x + 2\,y - 1 = 0 \end{cases}$, ou ainda: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

Logo o único ponto crítico da função f em $\mathbb{R}^2$ é o ponto

$$P_o \doteq (1, 0)\,. \tag{59}$$

Aplicarmos o teste do hessiano para classificar o ponto crítico P_o.

Notemos que a matriz hessiana da função em $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, será dada por

$$\mathrm{Hess}_f(x, y) \doteq \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} \overset{(56),(57),(58)}{=} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \tag{60}$$

$$\text{logo } \mathrm{hess}_f(x, y) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\,. \tag{61}$$

Logo do teste do hessiano, aplicado ao ponto P_o, como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_o) \overset{(55) \text{ e } (59)}{=} 4 > 0$$

$$\text{e} \quad \mathrm{hess}_f(P_o) \overset{(61) \text{ e } (55)}{=} 3 > 0\,,$$

segue que a função f tem um ponto de mínimo no ponto $P_o \doteq (1, 0)$.

item (g):

Seja $f : A \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x, y) \doteq \frac{1}{x} - \frac{64}{y} + x\,y\,, \text{ para } (x, y) \in A \doteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y)\,; x = 0 \text{ ou } y = 0\}\,. \tag{62}$$

Notemos que $f \in C^\infty(A\,;\mathbb{R})$ e além disso, para $(x\,,y) \in A$, teremos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y) \overset{(62)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{x} - \frac{64}{y} + x\,y\right] = -\frac{1}{x^2} + y \tag{63}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y) \overset{(62)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{x} - \frac{64}{y} + x\,y\right] = \frac{64}{y^2} + x \tag{64}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\right] \overset{(63)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{1}{x^2} + y\right] = \frac{2}{x^3} \tag{65}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y)\right] \overset{(64)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{64}{y^2} + x\right] = -\frac{128}{y^3} \tag{66}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x\,,y) \overset{\text{Teor. de Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\right] \overset{(63)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left[2 - \frac{1}{x^2} + y\right] = 1 \tag{67}$$

Procuremos os pontos críticos da função f em $\mathbb{R}^2$, ou seja, se $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$(0\,,0) = \nabla f(x\,,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\,,\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y)\right) \overset{(54)\text{ e }(55)}{=} \left(-\frac{1}{x^2} + y\,,\frac{64}{y^2} + x\right)$$

ou seja, $\begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} + y = 0 \\ \dfrac{64}{y^2} + x = 0 \end{cases}$, isto é, $\begin{cases} \dfrac{-1 + x^2\,y}{x^2} = 0 \\ \dfrac{64 + y^2\,x}{y^2} = 0 \end{cases}$, ou : $\begin{cases} x^2\,y - 1 = 0 \\ y^2\,x + 64 = 0 \end{cases}$, ou ainda: $\begin{cases} x = \dfrac{1}{4} \\ y = 16 \end{cases}$

Logo o único ponto crítico da função f em $\mathbb{R}^2$ é o ponto

$$P_o \doteq \left(\frac{1}{4}\,,16\right)\,. \tag{68}$$

Aplicarmos o teste do hessiano para classificar o ponto crítico P_o.
Notemos que a matriz hessiana da função em $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, será dada por

$$\mathrm{Hess}_f(x\,,y) \doteq \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x\,,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x\,,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x\,,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x\,,y) \end{pmatrix} \overset{(65),(66),(67)}{=} \begin{pmatrix} \dfrac{2}{x^3} & 1 \\ 1 & -\frac{128}{y^3} \end{pmatrix}\,, \tag{69}$$

$$\text{logo } \mathrm{hess}_f(x\,,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{2}{x^3} & 1 \\ 1 & -\dfrac{128}{y^3} \end{vmatrix} = -\frac{256}{x^3\,y^3} - 1\,. \tag{70}$$

Logo do teste do hessiano, aplicado ao ponto P_o, como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_o) \overset{(70)\text{ e }(68)}{=} \frac{2}{(\frac{1}{4})^3} = 128 > 0$$

$$\text{e} \quad \mathrm{hess}_f(P_o) \overset{(70)\text{ e }(68)}{=} -\frac{256}{(\frac{1}{4})^3\,16^3} - 1 = 3 > 0\,,$$

segue que a função f tem um ponto de mínimo no ponto $P_o \doteq (1\,,0)$.
item (h): será deixado como exercício para o leitor.
item (i):
Seja $f : A \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x\,,y) \doteq \frac{8}{x} - \frac{x}{y} + y\,,\ \text{para } (x\,,y) \in A \doteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(x\,,y)\,;\,x = 0 \text{ ou } y = 0\}. \tag{71}$$

Notemos que $f \in C^\infty(A\,;\mathbb{R})$ e além disso, para $(x\,,y) \in A$, teremos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y) \overset{(71)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{8}{x} - \frac{x}{y} + y\right] = -\frac{8}{x^2} - \frac{1}{y} \tag{72}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y) \overset{(62)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{8}{x} - \frac{x}{y} + y\right] = \frac{x}{y^2} + 1 \tag{73}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\right] \overset{(72)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{8}{x^2} - \frac{1}{y}\right] = \frac{16}{x^3} \tag{74}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y)\right] \overset{(64)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{x}{y^2} + 1\right] = -\frac{2\,x}{y^3} \tag{75}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x\,,y) \overset{\text{Teor. de Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\right] \overset{(63)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{8}{x^2} - \frac{1}{y}\right] = \frac{1}{y^2}\,. \tag{76}$$

Procuremos os pontos críticos da função f em $\mathbb{R}^2$, ou seja, se $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$(0\,,0) = \nabla f(x\,,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\,,\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y)\right) \overset{(72)\text{ e }(73)}{=} \left(-\frac{8}{x^2} - \frac{1}{y}\,,\frac{x}{y^2} + 1\right)$$

ou seja, $\begin{cases} -\dfrac{8}{x^2} - \dfrac{1}{y} = 0 \\ \dfrac{x}{y^2} + 1 = 0 \end{cases}$, isto é, $\begin{cases} x^2 + 8\,y = 0 \\ x + y^2 = 0 \end{cases}$, ou ainda: $\begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \end{cases}$

Notemos que $x = 0$ e $y = 0$ não são permitidos.
Logo os quatro únicos pontos críticos da função f em $\mathbb{R}^2$ é o ponto

$$P_1 \doteq (-4\,,-2)\ . \tag{77}$$

Aplicarmos o teste do hessiano para classificar o ponto crítico P_o.
Notemos que a matriz hessiana da função em $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, será dada por

$$\mathrm{Hess}_f(x\,,y) \doteq \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x\,,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x\,,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x\,,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x\,,y) \end{pmatrix} \overset{(74),(75),(76)}{=} \begin{pmatrix} \dfrac{16}{x^3} & \dfrac{1}{y^2} \\ \dfrac{1}{y^2} & -\dfrac{2\,x}{y^3} \end{pmatrix}, \tag{78}$$

$$\text{logo } \mathrm{hess}_f(x\,,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{16}{x^3} & \dfrac{1}{y^2} \\ \dfrac{1}{y^2} & -\dfrac{2\,x}{y^3} \end{vmatrix} = -\frac{32\,x}{x^3\,y^3} - \frac{1}{y^4}\,. \tag{79}$$

Logo do teste do hessiano, aplicado ao ponto P_1, como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_o) \overset{(74)\text{ e }(77)}{=} \frac{16}{(-4)^3} = -\frac{1}{4} < 0$$

$$\text{e}\quad \mathrm{hess}_f(P_1) \overset{(77)\text{ e }(78)}{=} -\frac{32\,(-4)}{(-4)^3 - 2)^3} - \frac{1}{(-2)^4} = \frac{3}{16} > 0\,,$$

segue que a função f tem um ponto de máximo no ponto $P_1 \doteq (-4\,,-2)$.

Exercício 4:

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x\,,y) \doteq (x - y)^6 + (y - 2)^2\,,\ \text{para } (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,. \tag{80}$$

Façamos a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{cases} z \doteq x - y \\ w \doteq y - 2 \end{cases} \tag{81}$$

Desta forma se considerarmos a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por

$$g(x\,,y) \doteq z^6 + w^2\,, \text{ para } (z\,,w) \in \mathbb{R}^2\,. \tag{82}$$

Notemos que $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2\,;\,\mathbb{R})$ e além disso:

$$\frac{\partial g}{\partial z}(z\,,w) \overset{(82)}{=} \frac{\partial}{\partial z}\left[z^6 + w^2\right] = 6\,z^5\,, \tag{83}$$

$$\frac{\partial g}{\partial w}(z\,,w) \overset{(82)}{=} \frac{\partial}{\partial w}\left[z^6 + w^2\right] = 2\,w\,, \tag{84}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(z\,,w) = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial g}{\partial z}(z\,,w)\right] \overset{(83)}{=} \frac{\partial}{\partial z}\left[6\,z^5\right] = 30\,z^4\,, \tag{85}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial w^2}(z\,,w) = \frac{\partial}{\partial w}\left[\frac{\partial g}{\partial w}(z\,,w)\right] \overset{(84)}{=} \frac{\partial}{\partial w}\left[2\,w\right] = 2\,, \tag{86}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial w\,\partial z}(x\,,y) \overset{\text{Teor. de Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 g}{\partial w\,\partial z}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial w}\left[\frac{\partial g}{\partial z}(x\,,y)\right] \overset{(83)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left[6\,z^5\right] = 0\,. \tag{87}$$

Procuremos os pontos críticos da função g em $\mathbb{R}^2$, ou seja, se $(z\,,w) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$(0\,,0) = \nabla g(z\,,w) = \left(\frac{\partial g}{\partial z}(z\,,w)\,, \frac{\partial g}{\partial w}(z\,,w)\right) \overset{(84)\text{ e }(86)}{=} \left(6\,z^5\,, 2\,w\right)$$

$$\text{ou seja, } \begin{cases} 6\,z^5 = 0 \\ 2\,w = 0 \end{cases}, \text{ ou ainda: } \begin{cases} z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

Logo o único ponto crítico da função g em $\mathbb{R}^2$ é o ponto

$$P_o \doteq (0\,,0)\,. \tag{88}$$

Aplicarmos o teste do hessiano para classificar o ponto crítico P_o.
Notemos que a matriz hessiana da função em $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, será dada por

$$\mathrm{Hess}_f(x\,,y) \doteq \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(z\,,w) & \frac{\partial^2 g}{\partial w\,\partial z}(x\,,y) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial w\,\partial z}(z\,,w) & \frac{\partial^2 g}{\partial w^2}(x\,,y) \end{pmatrix} \overset{(87),(??),(??)}{=} \begin{pmatrix} 30\,z^4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \tag{89}$$

$$\text{logo } \mathrm{hess}_g(z\,,w) = \begin{vmatrix} 30\,z^4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 60\,z^4\,. \tag{90}$$

Logo do teste do hessiano, aplicado ao ponto P_o, como

$$\mathrm{hess}_g(P_o) \overset{(90)\text{ e }(88)}{=} 0\,,$$

logo **não** podemos aplicar o teste do hessiano.

Notemos porém que, para $(z\,,w) \in \mathbb{R}^2$, teremos:

$$g(z\,,w) \overset{(83)}{=} z^6 + w^2 \geq 0 = g(0\,,0) \overset{(88)}{=} g(P_o)\,,$$

portanto o ponto P_o é um ponto de mínimo local (na verdade, global) da função g.

Logo, de (83), teremos:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases} \quad , \quad \text{ou seja} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \quad .$$

Como

$$f(x, y) \overset{(80)}{=} (x - y)^6 + (y - 2)^2 \overset{(82)}{=} z^6 + w^2 \overset{(83)}{=} g(z, w),$$

e o ponto P_o é um ponto de mínimo local (na verdade, global) da função g, segue que o ponto $Q_o \doteq (2, 2)$ será ponto de mínimo local (na verdade, global) da função f.

Exercício 5:

Observemos que a função a ser minimizada é função distância de um ponto $P = (x, y, z)$ à origem $P_o = (0, 0, 0)$, isto é, a função $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$\begin{aligned} d(x, y) &\doteq d(P, P_o) \overset{\text{visto na disciplina de Geometria Analítica}}{=} \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 = z^2}, \quad \text{para cada} \quad P \doteq (x, y, z) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \tag{91}$$

sujeita ao vínculo

$$\{(x, y, z) \in A \; ; \; g(x, y, z) = 0\}, \tag{92}$$

onde a função $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x, y) \doteq x + 2y - z - 4, \quad \text{para} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^2. \tag{93}$$

Um fato importante a ser notado é que se o ponto $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^2$ é um ponto que satisfaz o vínculo (92) e minimiza a função $\underline{d}$, então este mesmo ponto minimizará a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x, y, z) \doteq d^2(x, y, z) \overset{(91)}{=} x^2 + y^2 + z^2, \quad \text{para cada} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \tag{94}$$

restrita ao mesmo vínculo (92) e reciprocamente.

Logo basta encontrarmos o(s) ponto(s) de mínimo da função $\underline{f}$, sujeita ao vínculo (92).

Esta observação facilitará os cálculos das derivadas parciais, pois a função $\underline{f}$ não envolve radicais.

Logo, nosso problema, resume-se a encontrar o mínimo global da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x, y, z) \doteq x^2 + y^2 + z^2, \quad \text{para cada} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^2, \tag{95}$$

sujeita à ao vínculo

$$g(x, y, z) \overset{(93)}{=} x + 2y - z - 4 = 0, \quad \text{para cada} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^2. \tag{96}$$

Observemos que as funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$, dadas pr (94) e (93), respectivamente, são de classe $\underline{C^\infty}$ em $\mathbb{R}^3$ (pois são funções polinomiais).

Notemos também que, para cada $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, teremos:

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right) \overset{(94)}{=} (2x, 2y, 2z) \tag{97}$$

$$\text{e} \qquad \nabla g(x, y, z) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) \right) \overset{(93)}{=} (1, 2, -1) \neq (0, 0, 0), \tag{98}$$

para cada $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Logo, pelo Teorema do multiplicador de Lagrange (Teorema 12.1.1, página 365 das notas de aula), temos que um ponto

$$P_o = (x_o, y_o, z_o)$$

que satisfaz a condição de minimizar a função $\underline{f}$, restrita ao vínculo (96), deverá satisfazer, para algum $\lambda_o \in \mathbb{R}$, as equações

$$\begin{cases} \nabla f(x_o, y_o, z_o) = \lambda_o \cdot \nabla g(x_o, y_o, z_o) \\ g(x_o, y_o, z_o) = 0 \end{cases}, \text{ e, de (97), (98), (96), torna-se: } \begin{cases} (2x_o, 2y_o\, 2z_o) = \lambda_o\,(1, 2, -1) \\ x_o + 2y_o - z_o - 4 = 0 \end{cases},$$

$$\text{ou seja, } \begin{cases} 2x_o = \lambda_o \\ 2y_o = 2\lambda_o \\ 2z_o = -\lambda_o \\ x_o + 2y_o - z_o - 4 = 0 \end{cases}, \text{ isto é } \begin{cases} x_o = \dfrac{\lambda_o}{2} \\ y_o = \lambda_o \\ z_o = -\dfrac{\lambda_o}{2} \\ \dfrac{\lambda_o}{2} + 2\lambda_o - \left(-\dfrac{\lambda_o}{2}\right) - 4 = 0 \end{cases}, \text{ ou } \begin{cases} x_o = \dfrac{\lambda_o}{2} \\ y_o = \lambda_o \\ z_o = -\dfrac{\lambda_o}{2} \\ \lambda_o = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_o = \dfrac{4}{6} \\ y_o = \dfrac{4}{3} \\ z_o = -\dfrac{4}{6} \\ \lambda_o = \dfrac{4}{3} \end{cases} \tag{99}$$

Afirmamos que no ponto

$$P_o \doteq (x_o, y_o, z_o) \overset{(99)}{=} \left(\frac{4}{6}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{6}\right),$$

a função $\underline{f}$ tem um de mínimo, quando restrita ao vínculo (96).

A verficação deste fatos será deixada com exercício para o leitor.

Notemos, que a distância mínima será dada por

$$d\left(\frac{4}{6}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{6}\right) \overset{(91)}{=} \sqrt{\frac{24}{9}},$$

pois minimizamos a função $f \doteq d^2$, sujeita ao vínculo $g(x, y, z) = 0$, completando a resolução.

Exercício 6:

Notemos que a função f é contínua em $\mathbb{R}^2$ e o conjunto D é limitado e fechado.

Lodo de um resultado sabemos que a função f tem máximo e mínimo globais quando restrita ao conjunto D.

Para encontrar os máximos e o mínimo globais da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x, y) \doteq y^2 - x^2, \quad \text{para cada} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \tag{100}$$

quando é restrita ao disco

$$D \doteq \left\{(x, y);\, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\right\}. \tag{101}$$

precisamos encontrar o valor da função f nos pontos críticos da mesma que estão no interior do conjunto D, ou seja, em

$$\overset{\circ}{D} \doteq \left\{(x\,,y)\,;\,(x-1)^2+y^2<1\right\}\,. \tag{102}$$

e os valores de máximo e mínimo da função f quando restrita ao vínculo (que é a fronteira de D)

$$\partial D \doteq \left\{(x\,,y)\,;\,(x-1)^2+y^2=1\right\}\,. \tag{103}$$

Encontremos os pontos críticos de f em $\overset{\circ}{D}$.

Para tanto notemos que, para $(x\,,y) \in \overset{\circ}{D}$, temos

$$\begin{aligned} (0\,,0) = \nabla f(x\,,y) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\,,\,\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y)\right) \overset{(100)}{=} (-2\,x\,,2\,y) \\ \text{logo} \quad &\begin{cases} -2\,x = 0 \\ 2\,y = 0 \end{cases}, \text{ ou seja } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}. \end{aligned} \tag{104}$$

Notemos que o ponto crítico da função f

$$P_o \doteq (0\,,0) \in \partial D \tag{105}$$

logo, não existe ponto crítico da função f pertencente ao conjunto $\overset{\circ}{D}$.

Desta forma o máximo e o mínimo da função f dever á ocorrer em ∂D.

Pa a encontrar os máximos e mínimos da função f quando restrita ao vínculo (103), utilizaremos o Teorema de multiplicadores de Lagrange para um vinculo (ou seja, Teorema 12.1.1, página 365 das notas de aula).

Logo, nosso problema, resume-se a encontrar o mínimo global da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por (100) sujeita à ao vínculo

$$\begin{aligned} &\partial D \doteq \{(x\,,y)\,;\,g(x\,,y)=0\}, \qquad (106) \\ \text{onde } \; &g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \text{ dada por} \\ &g(x\,,y) \doteq (x-1)^2+y^2-1\,, \quad \text{para cada} \quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,. \qquad (107) \end{aligned}$$

Observemos que as funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$, dadas pr (100) e (107), respectivamente, são de classe $\underline{C^\infty}$ em $\mathbb{R}^2$ (pois são funções polinomiais).

Notemos também que, para cada $(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3$, teremos:

$$\nabla f(x\,,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\,,\,\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y)\right) \overset{(100)}{=} (-2\,x\,,2\,y) \tag{108}$$

$$\text{e} \quad \nabla g(x\,,y) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x\,,y)\,,\,\frac{\partial g}{\partial y}(x\,,y)\,,\right) \overset{(107)}{=} (2\,(x-1)\,,2\,y) \neq (0\,,0)\,, \tag{109}$$

para cada $(x\,,y) \neq (1\,,0)$.

Logo, pelo Teorema do multiplicador de Lagrange (Teorema 12.1.1, página 365 das notas de aula), temos que um ponto

$$P_o = (x_o\,,y_o)$$

que satisfaz a condição de minimizar a função $\underline{f}$, restrita ao vínculo (106), deverá satisfazer, para algum $\lambda_o \in \mathbb{R}$, as equações

$$\begin{cases} \nabla f(x_o\,,y_o) = \lambda_o \cdot \nabla g(x_o\,,y_o) \\ g(x_o\,,y_o) = 0 \end{cases}, \text{ (108), (109), (106), (107), temos: } \begin{cases} (-2\,x_o\,,2\,y_o) = \lambda_o\,(2\,(x_o-1)\,,2\,y_o) \\ (x_o-1)^2 + y_o^2 - 1 = 0 \end{cases},$$

ou seja, $-\ x_o = \lambda_o\,(x_o - 1)\,,$ (110)

$$y_o = \lambda_o\,y_o \tag{111}$$

$$(x_o-1)^2 + y_o^2 - 1 = 0\,. \tag{112}$$

Notemos que se

$$y_o = 0\,, \quad \text{de (111), teremos:} \quad x_o = 0 \text{ ou } x = 2$$
$$\text{e de (110), segue que:} \quad \lambda_o = 0\,,$$

ou seja,

$$P_1 \doteq (0\,,0) \quad \text{ou } P_2 \doteq (0\,,2) \tag{113}$$

são pontos que satisfazes as condições do Teorema do multiplicador de Lagrange.

Por outro lado, se

$$y_o \neq 0\,, \text{ logo, de (111), teremos } \lambda_o = 1 \text{ e (110), (112) tornar-se-ão: } \begin{cases} -x_o = x_o - 1 \\ (x_o-1)^2 + y_o^2 - 1 = 0 \end{cases},$$

$$\text{ou seja } \begin{cases} x_o = \dfrac{1}{2} \\ \left(\dfrac{1}{2} - 1\right)^2 + y_o^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x_o = \dfrac{1}{2} \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + y_o^2 - 1 = 0 \end{cases}, \text{ ou ainda, } \begin{cases} x_o = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4} + y_o^2 - 1 = 0 \end{cases},$$

$$\text{logo:} \quad \begin{cases} x_o = \dfrac{1}{2} \\ \lambda_o = 1 \\ y_1 \doteq \dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad y_2 \doteq -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \tag{114}$$

Logo os pontos

$$P_3 \doteq \left(\frac{1}{2}\,,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{e} \quad P_4 \doteq \left(\frac{1}{2}\,,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \tag{115}$$

satisfazem as condições do Teorema do multiplicador de Lagrange.

Notemos que

$$f(P_1) \overset{(113)}{=} f(0\,,0) \overset{(100)}{=} 0^2 - 0^2 = 0\,, \tag{116}$$

$$f(P_2) \overset{(113)}{=} f\,(0\,,2) \overset{(100)}{=} 0^2 - 2^2 = -4\,,$$

$$f(P_3) \overset{(115)}{=} f\left(\frac{1}{2}\,,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \overset{(100)}{=} \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}\,,$$

$$f(P_4) \overset{(115)}{=} f\left(\frac{1}{2}\,,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \overset{(100)}{=} \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}\,,$$

Portanto podemos mostrar que a função f tem máximo global em D no ponto $P_1 = (0\,,0)$ (cujo a valor é 0) e mínimo global no ponto $P_2 \doteq (0\,,2)$ (cujo valor é -4).

<u>Exercício 7:</u>

Sejam $x\,,y\,,z \in \mathbb{R}$ tal que

$$x + y + z = 120\,. \tag{117}$$

Logo queremos maximizar o valor da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x\,,y\,,z) = x\,y + x\,z + y\,z\,, \quad \text{para cada} \quad (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,, \tag{118}$$

quando restrita ao vínculo

$$\{(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x + y + z = 120\}\,. \tag{119}$$

Notemos que se a função $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por

$$g(x\,,y\,,z) = x + y + z - 120\,, \quad \text{para cada} \quad (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,, \tag{120}$$

então (119) tornar-se

$$\{(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, g(x\,,y\,,z) = 0\}\,. \tag{121}$$

Para encontrar o máximo da função f quando restrita ao vínculo (121) utilizaremos o Teorema do multiplicador de Lagrange.

Observemos que as funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$, dadas pr (100) e (107), respectivamente, são de classe $\underline{C^\infty}$ em $\mathbb{R}^3$ (pois são funções polinomiais).

Notemos também que, para cada $(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3$, teremos:

$$\nabla f(x\,,y\,,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y\,,z)\,, \frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y\,,z)\,, \frac{\partial f}{\partial z}(x\,,y\,,z)\right) \overset{(118)}{=} (y + z\,, x + z\,, x + y) \tag{122}$$

$$\text{e} \qquad \nabla g(x\,,y\,,z) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x\,,y\,,z)\,, \frac{\partial g}{\partial y}(x\,,y\,,z)\,, \frac{\partial g}{\partial z}(x\,,y\,,z)\right) \overset{(120)}{=} (1\,,1\,,1) \neq (0\,,0\,,0)\,, \tag{123}$$

Logo, pelo Teorema do multiplicador de Lagrange (Teorema 12.1.1, página 365 das notas de aula), temos que um ponto

$$P_o = (x_o\,,y_o\,,z_o)$$

que satisfaz a condição de minimizar a função $\underline{f}$, restrita ao vínculo (120), deverá satisfazer, para algum $\lambda_o \in \mathbb{R}$, as equações

$$\begin{cases} \nabla f(x_o\,,y_o\,z_o) = \lambda_o \cdot \nabla g(x_o\,,y_o\,z_o) \\ g(x_o\,,y_o\,,z_o) = 0 \end{cases}\,, \text{ (122), (123), (120), temos:}$$

$$\begin{cases} (y_o + z_o\,, x_o + z_o\,, x_o + y_o) = \lambda_o\,(1\,,1\,,1) \\ x_o + y_o + z_o - 120 = 0 \end{cases}\,, \text{ ou seja, } \begin{cases} y_o + z_o = \lambda_o \\ x_o + z_o = \lambda_o \\ x_o + y_o = \lambda_o \\ x_o + y_o + z_o = 120 \end{cases}\,,$$

$$\text{assim : } \begin{cases} \lambda_o = 80 \\ x_o = 40 \\ y_o = 40 \\ z_o = 40 \end{cases}\,. \tag{124}$$

Logo

$$P_0 \doteq (40\,,40\,,40) \tag{125}$$

é o único ponto que satisfaz as condições do Teorema do multiplicador de Lagrange.

Notemos que

$$f(P_o) \overset{(118)}{=} f(40\,,40\,,40) \overset{(118)}{=} 40\cdot 40 + 40\cdot 40 + 40\cdot 40 = 4800\,.$$

Portanto podemos mostrar que a função f tem máximo global quando restrita ao vínculo g no ponto $P_o = (40\,,40\,,40)$ (cujo a valor é 4800) .

Exercício 8:

Queremos encontrar $x\,,y\,,z\,,w \in (0\,,\infty)$, satisfazendo

$$x\,y\,z\,w = a\,,$$

de modo que a soma

$$x + y + z + w$$

seja o menor valor possível.

Logo queremos maximizar o valor da função $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x\,,y\,,z\,,w) = x + y + z + w\,, \quad \text{para cada} \quad (x\,,y\,,z\,,w) \in \mathbb{R}^4\,, \tag{126}$$

quando restrita ao vínculo

$$\{(x\,,y\,,z\,,w) \in \mathbb{R}^4\,;\, x\,y\,z\,w = a\}. \tag{127}$$

Notemos que se a função $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, dada por

$$g(x\,,y\,,z\,,w) = x\,y\,z\,w - a\,, \quad \text{para cada} \quad (x\,,y\,,z\,,w) \in \mathbb{R}^4\,, \tag{128}$$

então (127) tornar-se

$$\{(x\,,y\,,z\,,w) \in \mathbb{R}^4\,;\, g(x\,,y\,,z\,,w) = 0\}. \tag{129}$$

Para encontrar o máximo da função f quando restrita ao vínculo (129) utilizaremos o Teorema do multiplicador de Lagrange.

Observemos que as funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$, dadas por (126) e (128), respectivamente, são de classe $\underline{C^\infty}$ em $\mathbb{R}^4$ (pois são funções polinomiais).

Notemos também que, para cada $(x\,,y\,,z\,,w) \in \mathbb{R}^4$, teremos:

$$\begin{aligned} \nabla f(x\,,y\,,z\,,w) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y\,,z\,,w)\,,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y\,,z,\,,w)\,,\ \frac{\partial f}{\partial z}(x\,,y\,,z\,,w)\,,\ \frac{\partial f}{\partial w}(x\,,y\,,z\,,w)\right) \\ &\overset{(128)}{=} (1\,,1\,,1\,,1) && (130) \\ \text{e} \qquad \nabla g(x\,,y\,,z\,,w) &= \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x\,,y\,,z\,,w)\,,\ \frac{\partial g}{\partial y}(x\,,y\,,z,\,,w)\,,\ \frac{\partial g}{\partial z}(x\,,y\,,z\,,w)\,,\ \frac{\partial g}{\partial w}(x\,,y\,,z\,,w)\right) \\ &\overset{(128)}{=} (y\,z\,w\,, x\,z\,w\,, x\,y\,w\,, x\,y\,z) \neq (0\,,0\,,0)\,, && (131) \end{aligned}$$

pois $x\,,y\,,z\,,w \in (0\,,\infty)$.

Logo, pelo Teorema do multiplicador de Lagrange (Teorema 12.1.1, página 365 das notas de aula), temos que um ponto

$$P_o = (x_o\,,y_o\,,z_o\,,w_o)$$

que satisfaz a condição de minimizar a função $\underline{f}$, restrita ao vínculo (120), deverá satisfazer, para algum $\lambda_o \in \mathbb{R}$, as equações

$$\begin{cases} \nabla f(x_o\,,y_o\,z_o\,,w_o) = \lambda_o \cdot \nabla g(x_o\,,y_o\,z_o\,,w_o) \\ g(x_o\,,y_o\,,z_o\,,w_o) = 0 \end{cases} \quad , \text{ (130), (131), (128), temos:}$$

$$\begin{cases} (1\,,1\,,1\,,1) = \lambda_o\,(y\,z\,w\,,x\,z\,w\,,x\,y\,w\,,x\,y\,z) \\ x_o\,y_o\,z_o\,w_o - a = 0 \end{cases} \quad , \text{ ou seja, } \begin{cases} 1 = \lambda_o\,y_o\,z_o\,w_o \\ 1 = \lambda_o\,x_o\,z_o\,w_o \\ 1 = \lambda_o\,x_o\,y_o\,w_o \\ 1 = \lambda_o\,x_o\,y_o\,z_o \\ x_o\,y_o\,z_o\,w_o = a \end{cases} ,$$

$$\text{assim : } \begin{cases} \lambda_o = \dfrac{1}{\sqrt[4]{a^3}} \\ x_o = y_o = z_o = w_o = \sqrt[4]{a} \end{cases} . \tag{132}$$

Logo

$$P_o \doteq \left(\sqrt[4]{a}\,,\sqrt[4]{a}\,,\sqrt[4]{a}\,,\sqrt[4]{a}\right) \tag{133}$$

é o único ponto que satisfaz as condições do Teorema do multiplicador de Lagrange.

Notemos que

$$f(P_o) \overset{(133)}{=} f\left(\sqrt[4]{a}\,,\sqrt[4]{a}\,,\sqrt[4]{a}\,,\sqrt[4]{a}\right) \overset{(126)}{=} \sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{a} = 4\,\sqrt[4]{a}\,.$$

Portanto podemos mostrar que a função f tem mínimo global quando restrita ao vínculo g no ponto $P_o = \left(\sqrt[4]{a}\,,\sqrt[4]{a}\,,\sqrt[4]{a}\,,\sqrt[4]{a}\right)$ (cujo a valor é $4\,\sqrt[4]{a}$) .

Exercício 9:

(a):

Logo queremos minimizar o valor da função que nos dá a distância de um ponto $(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3$ até a origem , ou seja, a função $d : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por

$$d(x\,,y\,,z) \doteq \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,, \quad \text{para cada} \quad (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,, \tag{134}$$

quando restrita ao vínculo

$$\{(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x^2 + 2\,y^2 - z^2 = 1\}\,. \tag{135}$$

Notemos que podemos considerar o mesmo problema acima trocando-se d pela função $f \doteq d^2$, ou seja, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x\,,y\,,z) \doteq x^2 + y^2 + z^2\,, \quad \text{para cada} \quad (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,, \tag{136}$$

Notemos que se a função $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por

$$g(x\,,y\,,z) = x^2 + 2\,y^2 - z^2 - 1\,, \quad \text{para cada} \quad (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,, \tag{137}$$

então (135) tornar-se

$$\{(x\,,y\,,z)\in\mathbb{R}^3\,;\,g(x\,,y\,,z)=0\}\,. \tag{138}$$

Para encontrar o mínimo da função f quando restrita ao vínculo (137) utilizaremos o Teorema do multiplicador de Lagrange.

Observemos que as funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$, dadas por (126) e (137), respectivamente, são de classe $\underline{C^\infty}$ em $\mathbb{R}^3$ (pois são funções polinomiais).

Notemos também que, para cada $(x\,,y\,,z)\in\mathbb{R}^3$, teremos:

$$\begin{aligned}
\nabla f(x\,,y\,,z) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y\,,z)\,,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y\,,z)\,,\frac{\partial f}{\partial z}(x\,,y\,,z)\right)\\
&\overset{(136)}{=}(2\,x\,,2\,y\,,2\,z) && (139)\\
\text{e}\qquad \nabla g(x\,,y\,,z) &= \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x\,,y\,,z)\,,\ \frac{\partial g}{\partial y}(x\,,y\,,z)\,,\frac{\partial g}{\partial z}(x\,,y\,,z)\right)\\
&\overset{(137)}{=}(2\,x\,,4\,y\,,-2\,z)\neq(0\,,0\,,0)\,, && (140)
\end{aligned}$$

se $(x\,,y\,,z)\neq(0\,,0\,,0)$.

Logo, pelo Teorema do multiplicador de Lagrange (Teorema 12.1.1, página 365 das notas de aula), temos que um ponto

$$P_o=(x_o\,,y_o\,,z_o)$$

que satisfaz a condição de minimizar a função $\underline{f}$, restrita ao vínculo (138), deverá satisfazer, para algum $\lambda_o\in\mathbb{R}$, as equações

$$\begin{cases}\nabla f(x_o\,,y_o\,z_o)=\lambda_o\cdot\nabla g(x_o\,,y_o\,z_o)\\ g(x_o\,,y_o\,,z_o)=0\end{cases}\ ,\ \text{(139), (140), (138), temos:}$$

$$\begin{cases}(2\,x_o\,,2\,y_o\,,2\,z_o)=\lambda_o\,(2\,x_o\,,4\,y_o\,,-2\,z_o)\\ x_o^2+2\,y_o^2-z_o^2-1=0\end{cases}\ ,\ \text{ou seja,}\ \begin{cases}2\,x_o=2\,\lambda_o\,x_o\\ 2\,y_o=4\,\lambda_o\,y_o\\ 2\,z_o=-2\,\lambda_o\,z_o\\ x_o^2+2\,y_o^2-z_o^2-1=0\end{cases}\ ,$$

$$\text{ou}\ \begin{cases}x_o=\lambda_o\,x_o\\ y_o=2\,\lambda_o\,y_o\\ z_o=-\lambda_o\,z_o\\ x_o^2+2\,y_o^2-z_o^2-1=0\end{cases}\ . \tag{141}$$

Notemos que

$$\lambda_o\neq0\,,$$

caso contrário das 3 primeiras equações acima teríamos

$$x_o=y_o=z_o=0$$

que não satisfaz a 4.a equação.

Por outro lado, se

$$x_o\neq0\,,$$

da 1.a equação teríamos

$$\lambda_o = 1 \, .$$

Logo, substituindo-se este na 2.a e 3.a equações obteremos

$$y_o = z_o = 0$$

e, da 4.a equações teríamos

$$x_o^2 + 2 \cdot 0^2 - 0^2 = 1 \, , \quad \text{ou seja} \quad x_o = \pm 1$$

Com isto teremos os pontos

$$P_1 \doteq (-1 \, , 0 \, , 0) \quad \text{e} \quad P_2 \doteq (1 \, , 0 \, , 0) \tag{142}$$

satisfazem as condições do Teorema do multiplicador de Lagrange.

Por outro lado, se

$$y_o \neq 0 \, ,$$

da 2.a equação teríamos

$$\lambda_o = \frac{1}{2} \, .$$

Logo, substituindo-se este na 1.a e 3.a equações obteremos

$$x_o = z_o = 0$$

e, da 4.a equações teríamos

$$0^2 + 2 \, y_o^2 - 0^2 = 1 \, , \quad \text{ou seja} \quad y_o = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \, .$$

Com isto teremos os pontos

$$P_3 \doteq \left(0 \, , \frac{\sqrt{2}}{2} \, , 0 \right) \quad \text{e} \quad P_4 \doteq \left(0 \, , \frac{\sqrt{2}}{2} \, , 0 \right) \tag{143}$$

satisfazem as condições do Teorema do multiplicador de Lagrange.

Por outro lado, se

$$z_o \neq 0 \, ,$$

da 3.a equação teríamos

$$\lambda_o = -1 \, .$$

Logo, substituindo-se este na 1.a e 2.a equações obteremos

$$x_o = y_o = 0$$

e, da 4.a equações teríamos

$$0^2 + 2 \, 0^2 - z_o^2 = 1 \, , \quad \text{que é impossível} \, .$$

Notemos que

$$f(P_1) \overset{(142)}{=} f(-1,0,0) \overset{(136)}{=} (-1)^2 + 0^2 + 0^2 = 1, \tag{144}$$

$$f(P_2) \overset{(142)}{=} f(1,0,0) \overset{(136)}{=} 1^2 + 0^2 + 0^2 = 1, \tag{145}$$

$$f(P_3) \overset{(143)}{=} f\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \overset{(136)}{=} 0^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0^2 = \frac{1}{2}, \tag{146}$$

$$f(P_4) \overset{(143)}{=} f\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \overset{(136)}{=} 0^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0^2 = \frac{1}{2}, \tag{147}$$

Portanto podemos mostrar que a função f tem mínimo global quando restrita ao vínculo g no ponto $P_o = \left(\sqrt[4]{a}, \sqrt[4]{a}, \sqrt[4]{a}, \sqrt[4]{a}\right)$ (cujo a valor é $4\sqrt[4]{a}$).

Logo os pontos de (135) que distam menos do ponto $(0,0,0)$ são os pontos

$$P_3 \doteq \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \quad \text{e} \quad P_4 \doteq \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right),$$

cujo valor será $\frac{1}{2}$.

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

(b):

Logo queremos minimizar o valor da função que nos dá a distância de um ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ até a origem , ou seja, a função $d : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por

$$d(x,y) \doteq \sqrt{(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2}, \quad \text{para cada} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^3, \tag{148}$$

quando restrita ao vínculo

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^3;\, a\,x + b\,y - c\}. \tag{149}$$

Notemos que podemos considerar o mesmo problema acima trocando-se d pela função $f \doteq d^2$, ou seja, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x,y) \doteq (x-x_o)^2 + (y-y_o)^2, \quad \text{para cada} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \tag{150}$$

Notemos que se a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por

$$g(x,y,z) = a\,x + b\,y - c, \quad \text{para cada} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^3, \tag{151}$$

então (135) tornar-se

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\, g(x,y) = 0\}. \tag{152}$$

Para encontrar o mínimo da função f quando restrita ao vínculo (152) utilizaremos o Teorema do multiplicador de Lagrange.

Observemos que as funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$, dadas por (150) e (151), respectivamente, são de classe $\underline{C^\infty}$ em $\mathbb{R}^2$ (pois são funções polinomiais).

Notemos também que, para cada $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, teremos:

$$\nabla f(x\,,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\,,\,\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y)\right) \overset{(150)}{=} (2\,(x - x_o)\,,2\,(y - y_o)) \tag{153}$$

$$\text{e} \qquad \nabla g(x\,,y) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x\,,y)\,,\,\frac{\partial g}{\partial y}(x\,,y)\right) \overset{(151)}{=} (a\,,b) \neq (0\,,0)\,, \tag{154}$$

se $(x\,,y) \neq (0\,,0)$.

Logo, pelo Teorema do multiplicador de Lagrange (Teorema 12.1.1, página 365 das notas de aula), temos que um ponto

$$P_1 = (x_1\,,y_1)$$

que satisfaz a condição de minimizar a função $\underline{f}$, restrita ao vínculo (152), deverá satisfazer, para algum $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, as equações

$$\begin{cases} \nabla f(x_1\,,y_1) = \lambda_1 \cdot \nabla g(x_1\,,y_1\,) \\ g(x_1\,,y_1) = 0 \end{cases} \quad \text{, (153), (154), (152), temos:}$$

$$\begin{cases} (2\,(x_1 - x_o)\,,2\,(y_1 - y_o)) = \lambda_1\,(a\,,b) \\ a\,x + b\,y - c = 0 \end{cases} \quad \text{, ou seja,} \quad \begin{cases} 2\,(x_1 - x_o) = \lambda_1\,a \\ 2\,(y_1 - y_o) = \lambda_1\,b \\ a\,x_1 + b\,y_1 = c \end{cases} \quad ,$$

$$\text{ou} \quad \begin{cases} 2\,x_1 - a\,\lambda_1 = 2\,x_o \\ 2\,y_1 - b\,\lambda_1 = 2\,y_o \\ a\,x_1 + b\,y_1 = c \end{cases} \quad \text{ou ainda} \quad \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{2\,(a\,x_o + b\,y_o - c)}{a^2 + b^2} \\ x_1 = x_o + \dfrac{a(a\,x_o + b\,y_o + c)}{a^2 + b^2} \\ y_1 = y_o + \dfrac{b(a\,x_o + b\,y_o - c)}{a^2 + b^2} \end{cases} \quad . \tag{155}$$

Logo o ponto

$$P_1 \doteq \left(x_o + \frac{a(a\,x_o + b\,y_o + c)}{a^2 + b^2}\,,y_o + \frac{b(a\,x_o + b\,y_o - c)}{a^2 + b^2}\right)\,, \tag{156}$$

satisfaz as condições do Teorema do multiplicador de Lagrange.

Notemos que

$$\begin{aligned} f(P_1) &\overset{(156)}{=} f\left(x_o + \frac{a(a\,x_o + b\,y_o + c)}{a^2 + b^2}\,,y_o + \frac{b(a\,x_o + b\,y_o - c)}{a^2 + b^2}\right) \\ &\overset{(150)}{=} \left[x_o + \frac{a(a\,x_o + b\,y_o + c)}{a^2 + b^2} - x_o\right]^2 + \left[y_o + \frac{b(a\,x_o + b\,y_o + c)}{a^2 + b^2} - y_o\right]^2 \\ &= \frac{a^2\,(a\,x_o + b\,y_o + c)^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{b^2\,(a\,x_o + b\,y_o + c)^2}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{(a\,x_o + b\,y_o + c)^2}{a^2 + b^2}\,, \end{aligned} \tag{157}$$

logo o mínimo da $d = \sqrt{f}$, quando restrita ao vínculo (149), ocorrerá no ponto P_1, dado por (157), cujo valor será

$$d(P_1) = \sqrt{f(P_1)} \overset{(157)}{=} \sqrt{\frac{(a\,x_o + b\,y_o + c)^2}{a^2 + b^2}} = \frac{|a\,x_o + b\,y_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,.$$

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

<u>(c):</u>

Precisamos minimizar a função distância de um ponto $\underline{P}$ ao ponto $\underline{P_o}$, isto é, minimizar a função $d : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por

$$d(x\,,y\,,z) \doteq d(P\,,P_o) \overset{\text{Geometria Analítica}}{=} \sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2+(z-z_o)^2}\,, \quad \text{para} \quad (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,, \tag{158}$$

sujeita ao vínculo

$$\{(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, g(x\,,y\,,z) = 0\}\,, \tag{159}$$

onde a função $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é dada por

$$g(x\,,y,z) \doteq a\,x + b\,y + c\,z + d\,, \quad \text{para cada} \quad (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,. \tag{160}$$

Iremos minimizar a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x\,,y\,,z) \doteq d^2(x\,,y\,,z) = (x-x_o)^2+(y-y_o)^2+(z-z_o)^2\,, \quad \text{para cada} \quad (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,, \tag{161}$$

sujeita ao vínculo (159).

Observemos que as funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$ são de classe $\underline{C^\infty}$ em $\mathbb{R}^3$ (pois são funções polinomiais).

Notemos também que, para $(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3$, teremos:

$$\begin{aligned}
\nabla f(x\,,y\,,z) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y\,,z)\,,\, \frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y\,,z)\,,\, \frac{\partial f}{\partial z}(x\,,y\,z)\right) \\
&\overset{(161)}{=} (2\,(x-x_o)\,,\, 2\,(y-y_o)\,,\, 2\,(z-z_o))\,, \qquad (162)\\
\text{e} \\
\nabla g(x\,,y\,,z) &= \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x\,,y\,,z)\,,\, \frac{\partial g}{\partial y}(x\,,y\,,z)\,,\, \frac{\partial g}{\partial z}(x\,,y\,,z)\right) \\
&\overset{(161)}{=} (a\,,b\,,c) \overset{a^2+b^2+c^2\neq 0}{\neq} (0\,,0\,,0)\,. \qquad (163)
\end{aligned}$$

Logo podemos aplicar o Teorema do multiplicador de Lagrange (Teorema 12.1.1, página 365 das notas de aula).

Neste caso, um ponto

$$P_1 \doteq (x_1\,,y_1\,,z_1)$$

que satisfaz a condição de maximizar a função $\underline{f}$, restrita ao vínculo (159), deverá satisfazer, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, as equações:

$$\begin{cases} \nabla f(x_1\,, y_1\,, z_1) = \lambda_1 \cdot \nabla g(x_1\,, y_1\,, z_1) \\ g(x_1\,, y_1\,, z_1) = 0 \end{cases}$$

que, de (162) e (163), é o mesmo que: $$\begin{cases} (2\,(x_1 - x_o)\,,\, 2\,(y_1 - y_o)\,,\, 2\,(z_1 - z_o)) = \lambda_1\,(a\,, b\,, c)\,, \\ a\,x_1 + b\,y_1 + c\,z_1 + d = 0 \end{cases}$$

ou seja, $$\begin{cases} 2\,(x_1 - x_o) = \lambda_1\,a \\ 2\,(y_1 - y_o) = \lambda_1\,b \\ 2\,(z_1 - z_o) = \lambda_1\,c \\ a\,x_1 + b\,y_1 + c\,z_1 + d = 0 \end{cases},$$

ou ainda, $$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\lambda_1\,a}{2} + x_o \\[2ex] y_1 = \dfrac{\lambda_1\,b}{2} + y_o \\[2ex] z_1 = \dfrac{\lambda_1\,c}{2} + z_o \\[2ex] a\,x_1 + b\,y_1 + c\,z_1 + d = 0 \end{cases}, \tag{164}$$

isto é, $$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\lambda_1\,a}{2} + x_o \\[2ex] y_1 = \dfrac{\lambda_1\,b}{2} + y_o \\[2ex] z_1 = \dfrac{\lambda_1\,c}{2} + z_o \\[2ex] \dfrac{\lambda_1}{2}\,\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + a\,x_o + b\,y_o + c\,z_o + d = 0 \end{cases}$$

ou seja, $$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\lambda_1\,a}{2} + x_o \\[2ex] y_1 = \dfrac{\lambda_1\,b}{2} + y_o \\[2ex] z_1 = \dfrac{\lambda_1\,c}{2} + z_o \\[2ex] \dfrac{\lambda_1}{2} = -\dfrac{a\,x_o + b\,y_o + c\,z_o + d}{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases} \tag{165}$$

$$\text{isto é,}\qquad \begin{cases} x_1 = x_o - \dfrac{a^2\,x_o + a\,b\,y_o + a\,c\,z_o + a\,d}{a^2+b^2+c^2} \\[2ex] y_1 = y_o - \dfrac{b\,a\,x_o + b^2\,y_o + b\,c\,z_o + b\,d}{a^2+b^2+c^2} \\[2ex] z_1 = z_o - \dfrac{c\,a\,x_o + c\,b\,y_o + c^2\,z_o + c\,d}{a^2+b^2+c^2} \end{cases},$$

$$\text{ou seja,}\qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{b\,(b\,x_o - a\,y_o) + c\,(c\,x_o - a\,z_o) - a\,d}{a^2+b^2+c^2} \\[2ex] y_1 = \dfrac{a\,(a\,y_o - b\,x_o) + c\,(c\,y_o - b\,z_o) - b\,d}{a^2+b^2+c^2} \\[2ex] z_1 = \dfrac{a\,(a\,z_o - c\,x_o) + b\,(b\,z_o - c\,y_o) - c\,d}{a^2+b^2+c^2} \end{cases}.$$

Mostremos que, no ponto

$$P_1 = (x_1\,,y_1\,,z_1)\,,$$

a função $\underline{f}$ tem um mínimo global, quando restrita ao vínculo (159).

De fato, pois a função não possui máximo, quando restrita ao vínculo (159) e temos

$$f(x\,,y\,,z) \overset{(161)}{=} x^2 + y^2 + z^2 \geq 0\,, \quad \text{para} \quad (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,.$$

Além disso, a distância do ponto

$$P_o = (x_o\,,y_o\,,z_o)$$

ao plano

$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0\,,$$

será dada por:

$$\sqrt{f(x_1\,,y_1\,,z_1)} \overset{(161)}{=} \sqrt{(\underbrace{x_1 - x_o}_{\overset{(164)}{=}\frac{\lambda_1\,a}{2}})^2 + (\underbrace{y_1 - y_o}_{\overset{(164)}{=}\frac{\lambda_1\,b}{2}})^2 + (\underbrace{z_1 - z_o}_{\overset{(164)}{=}\frac{\lambda_1\,c}{2}})^2} = \sqrt{\frac{{\lambda_1}^2}{4}a^2 + \frac{{\lambda_1}^2}{4}\,b^2 + \frac{{\lambda_1}^2}{4}\,c^2}$$

$$= \underbrace{\sqrt{\frac{{\lambda_1}^2}{4}\,\left(a^2+b^2+c^2\right)}}_{=\sqrt{\frac{{\lambda_1}^2}{4}}\,\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}} = \frac{|\lambda_1|}{2}\,\sqrt{a^2+b^2+c^2} \overset{(165)}{=} \frac{|a\,x_o + b\,y_o + c\,z_o + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\,,$$

que é a fórmula conhecida da distância de um ponto

$$P_o = (x_o, y_o, z_o)$$

a um plano que possui equação geral dada por

$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0,$$

visto na disciplina de Geometria Analítica.

Exercício 10:

(a):

Precisamos encontrar os extremo da função

$$f(x, y) \doteq x\,y\,, \quad \text{para} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2\,, \tag{166}$$

sujeita ao vínculo

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\, g(x, y) = 0\}\,, \tag{167}$$

onde a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é dada por

$$g(x, y) \doteq x + y - 1\,, \quad \text{para cada} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2\,. \tag{168}$$

Observemos que as funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$ são de classe $\underline{C^\infty}$ em $\mathbb{R}^2$ (pois são funções polinomiais).

Notemos também que, para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, teremos:

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) \\ &\overset{(167)}{=} (y\,,\, x)\,, \end{aligned} \tag{169}$$

e

$$\begin{aligned} \nabla g(x, y) &= \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\,,\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\right) \\ &\overset{(161)}{=} (1, 1) \neq (0, 0)\,. \end{aligned} \tag{170}$$

Logo podemos aplicar o Teorema do multiplicador de Lagrange (Teorema 12.1.1, página 365 das notas de aula).

Neste caso, um ponto

$$P_o \doteq (x_o, y_o)$$

que satisfaz a condição de ser extremo da função $\underline{f}$, restrita ao vínculo (167), deverá satisfazer, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, as equações:

$$\begin{cases} \nabla f(x_o, y_o) = \lambda_o \cdot \nabla g(x_o, y_o) \\ g(x_o, y_o) = 0 \end{cases}$$

que, de (169), (170) e (167), é o mesmo que: $\begin{cases} (y_o, x_o) = \lambda_o\,(1, 1)\,, \\ x_o + y_o - 1 = 0 \end{cases}$

$$\text{ou seja,} \quad \begin{cases} y_o = \lambda_o \\ x_o = \lambda_o \\ x_o + y_o - 1 = 0 \end{cases}, \quad \text{ou ainda,} \quad \begin{cases} y_o = \lambda_o \\ x_o = \lambda_o \\ \lambda_o + \lambda_o - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{ou}\,, \quad \begin{cases} y_o = \dfrac{1}{2} \\ x_o = \dfrac{1}{2} \\ \lambda_o = \dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{171}$$

Logo o ponto

$$P_o \doteq \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \tag{172}$$

satisfaz as condições do Teorema do multiplicador de Lagrange.

Notemos que

$$f(P_o) \overset{(172)}{=} f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \overset{(166)}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \tag{173}$$

Logo se $P = (x, y)$ satisfaz (167), teremos

$$f(P) - f(P_o) \overset{(166) \text{ e } (173)}{=} x\,y - \frac{1}{4} \overset{(167)}{=} x\,(1-x) - \frac{1}{4} = x - x^2 - \frac{1}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0,$$

ou seja, $f(P) \leq f(P_o)$,

se $P = (x, y)$ satisfaz (167), ou seja, a função f tem máximo global quando restrita ao vínculo (167) no ponto $P_o \doteq \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

(b):

Precisamos encontrar os extremo da função

$$f(x, y) \doteq x^2 + y^2, \quad \text{para} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tag{174}$$

sujeita ao vínculo

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\, g(x, y) = 0\}, \tag{175}$$

onde a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é dada por

$$g(x, y) \doteq 3\,x + 2\,y - 6, \quad \text{para cada} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{176}$$

Observemos que as funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$ são de classe $\underline{C^\infty}$ em $\mathbb{R}^2$ (pois são funções polinomiais).

Notemos também que, para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, teremos:

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) \overset{(174)}{=} (2\,x, 2\,y), \tag{177}$$

e

$$\nabla g(x, y) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\right) \overset{(176)}{=} (3, 2) \neq (0, 0). \tag{178}$$

Logo podemos aplicar o Teorema do multiplicador de Lagrange (Teorema 12.1.1, página 365 das notas de aula).

Neste caso, um ponto

$$P_o \doteq (x_o, y_o)$$

que satisfaz a condição de ser extremo da função $\underline{f}$, restrita ao vínculo (175), deverá satisfazer, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, as equações:

$$\begin{cases} \nabla f(x_o, y_o) = \lambda_o \cdot \nabla g(x_o, y_o) \\ g(x_o, y_o) = 0 \end{cases} \quad \text{que, de (177), (178) e (175), é o mesmo que:} \quad \begin{cases} (2\,x_o, 2\,y_o) = \lambda_o\,(3, 2), \\ 3\,x_o + 2\,y_o - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\text{ou seja,} \quad \begin{cases} 2\,x_o = 3\,\lambda_o \\ 2\,y_o = 2\,\lambda_o \\ 3\,x_o + 2\,y_o - 6 = 0 \end{cases}, \quad \text{ou ainda,} \quad \begin{cases} x_o = \frac{3}{2}\lambda_o \\ y_o = \lambda_o \\ 3\,\frac{3}{2}\lambda_o + 2\,\lambda_o - 6 = 0 \end{cases} \quad \text{ou ,} \quad \begin{cases} x_o = \frac{36}{26} = \frac{18}{13} \\ y_o = \frac{12}{13} \\ \lambda_o = \frac{12}{13} \end{cases} \tag{179}$$

Logo o ponto

$$P_o \doteq \left(\frac{18}{13}, \frac{12}{13}\right) \tag{180}$$

satisfaz as condições do Teorema do multiplicador de Lagrange.

Notemos que

$$f(P_o) \overset{(180)}{=} f\left(\frac{18}{13}, \frac{12}{13}\right) \overset{(174)}{=} \left(\frac{18}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{468}{169}. \tag{181}$$

Logo se $P = (x, y)$ satisfaz (175), teremos

$$\begin{aligned} f(P) - f(P_o) &\overset{(175)\text{ e }(181)}{=} x^2 + y^2 - \frac{468}{169} \overset{(175)}{=} x^2 + \left(\frac{6-3x}{2}\right)^2 - \frac{468}{169} \\ &= \frac{13x^2 - 36x + 36}{4} - \frac{468}{169} = \frac{2197x^2 - 6084x + 6084 - 1872}{676} = \frac{2197x^2 - 6084x + 4212}{676} \\ &= \frac{1}{676}\left(x - \frac{6084}{4394}\right)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

ou seja, $f(P) \geq f(P_o)$,

se $P = (x, y)$ satisfaz (167), ou seja, a função f tem mínimo global quando restrita ao vínculo (175) no ponto $P_o \doteq \left(\frac{18}{13}, \frac{12}{13}\right)$.

(c):

Precisamos encontrar os extremos da função

$$f(x, y) \doteq x^2 + y^2, \quad \text{para} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tag{182}$$

sujeita ao vínculo

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ g(x, y) = 0\}, \tag{183}$$

onde a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é dada por

$$g(x, y) \doteq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1, \quad \text{para cada} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{184}$$

Observemos que as funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$ são de classe $\underline{C^\infty}$ em $\mathbb{R}^2$ (pois são funções polinomiais).

Notemos também que, para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, teremos:

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) \overset{(182)}{=} (2x, 2y), \tag{185}$$

e

$$\nabla g(x, y) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\right) \overset{(184)}{=} \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}\right) \neq (0, 0), \tag{186}$$

pois $(0, 0)$ não pertence ai conjunto (183).

Logo podemos aplicar o Teorema do multiplicador de Lagrange (Teorema 12.1.1, página 365 das notas de aula).

Neste caso, um ponto

$$P_o \doteq (x_o, y_o)$$

que satisfaz a condição de ser extremo da função f, restrita ao vínculo (183), deverá satisfazer, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, as equações:

$$\begin{cases} \nabla f(x_o, y_o) = \lambda_o \cdot \nabla g(x_o, y_o) \\ g(x_o, y_o) = 0 \end{cases}$$ que, de (185), (186) e (183), nos dá: $$\begin{cases} (2x_o, 2y_o) = \lambda_o \left(\dfrac{2x_o}{a^2}, \dfrac{2y_o}{b^2} \right), \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

ou seja, $$\begin{cases} x_o = \dfrac{\lambda_o}{a^2} x_o \\ \\ y_o = \dfrac{\lambda_o}{b^2} y_o \\ \\ \dfrac{x_o^2}{a^2} + \dfrac{y_o^2}{b^2} - 1 = 0 \end{cases} . \tag{187}$$

Se

$$x_o = 0$$

substituindo-se este valor na 3.a equação, segue que

$$\frac{y_o^2}{b^2} - 1 = 0 , \text{ logo } y_o^2 = b^2 , \text{ ou seja, } y_1 \doteq -b \text{ e } y_2 \doteq b ,$$

obtendo-se os pontos

$$P_1 \doteq (0, -b) \quad \text{e} \quad P_2 \doteq (0, b) \tag{188}$$

satisfazem as condições do Teorema do multiplicador de Lagrange.

Se

$$y_o = 0$$

substituindo-se este valor na 3.a equação, segue que

$$\frac{x_o^2}{a^2} - 1 = 0 , \text{ logo } x_o^2 = a^2 , \text{ ou seja, } x_1 \doteq -a \text{ e } x_2 \doteq a ,$$

obtendo-se os pontos

$$P_3 \doteq (-a, 0) \quad \text{e} \quad P_2 \doteq (a, 0) \tag{189}$$

satisfazem as condições do Teorema do multiplicador de Lagrange.

Notemos que se

$$x_o \neq 0$$

substituindo-se este valor na 1.a equação, teríamos

$$\lambda_o = a^2$$

e substituindo-se este na 2.a equação

$$y_o = \underbrace{\frac{a^2}{b^2}}_{\neq 1 \text{, pois } a > b > 0} y_o$$

o que é impossível.

De modo semelhante podemos mostrar que $y_o \neq 0$ também dará origem um absurdo.

Portanto os pontos P_1, P_2, P_3 e P_4, dados por (188) e (189) são os únicos pontos que satisfazem as condições do Teorema do multiplicador de Lagrange.

Notemos que

$$f(P_1) \overset{(188)}{=} f(0\,,-b) \overset{(182)}{=} 0^2 + (-b)^2 = b^2\,, \tag{190}$$

$$f(P_2) \overset{(188)}{=} f(0\,,b) \overset{(182)}{=} 0^2 + b^2 = b^2\,, \tag{191}$$

$$f(P_3) \overset{(189)}{=} f(-a\,,0) \overset{(182)}{=} (-a)^2 + 0^2 = a^2\,, \tag{192}$$

$$f(P_9) \overset{(189)}{=} f(a\,,0) \overset{(182)}{=} (-a)^2 + 0^2 = a^2\,, \tag{193}$$

Logo se $P = (x\,,y)$ satisfaz (183), teremos

$$\begin{aligned} f(P) - f(P_1) &\overset{(182)\text{ e }(190)}{=} x^2 + y^2 - b^2 \overset{(183)}{=} x^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) - b^2 = \frac{\left(a^2 - b^2\right)x^2}{a^2} \overset{a^2 > b^2}{\geq} 0\,, \\ &\text{ou seja, } f(P) \geq f(P_1) \end{aligned} \tag{194}$$

e, de modo análogo,

$$\begin{aligned} f(P) - f(P_2) &\overset{(182)\text{ e }(191)}{=} x^2 + y^2 - b^2 \overset{(183)}{=} x^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) - b^2 = \frac{\left(a^2 - b^2\right)x^2}{a^2} \overset{a^2 > b^2}{\geq} 0\,, \\ &\text{ou seja, } f(P) \geq f(P_2) \end{aligned} \tag{195}$$

Portanto a função f tem mínimo global quando restrita ao vínculo (183) nos pontos $P_1 \doteq (0\,,-b)$ e $P_2 \doteq (0\,,b)$.

Por outro lado se $P = (x\,,y)$ satisfaz (183), teremos

$$\begin{aligned} f(P) - f(P_3) &\overset{(182)\text{ e }(192)}{=} x^2 + y^2 - a^2 \overset{(183)}{=} a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) + y^2 - a^2 = \frac{\left(b^2 - a^2\right)x^2}{a^2} \overset{a^2 > b^2}{\leq} 0\,, \\ &\text{ou seja, } f(P) \leq f(P_3) \end{aligned} \tag{196}$$

e, de modo análogo,

$$\begin{aligned} f(P) - f(P_4) &\overset{(182)\text{ e }(192)}{=} x^2 + y^2 - a^2 \overset{(183)}{=} a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) + y^2 - a^2 = \frac{\left(b^2 - a^2\right)x^2}{a^2} \overset{a^2 > b^2}{\leq} 0\,, \\ &\text{ou seja, } f(P) \leq f(P_4) \end{aligned} \tag{197}$$

Portanto a função f tem máximo global quando restrita ao vínculo (183) nos pontos $P_3 \doteq (-a\,,0)$ e $P_4 \doteq (a\,,0)$.

Exercício 11:

Precisamos encontrar os extremos da função

$$f(x\,,y) \doteq x\,y\,, \quad \text{para} \quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,, \tag{198}$$

sujeita ao vínculo

$$\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2;\, g(x\,,y) = 0\}, \tag{199}$$

onde a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é dada por

$$g(x\,,y) \doteq x^2 + 2\,y^2 - 1\,, \quad \text{para cada} \quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,. \tag{200}$$

Observemos que as funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$ são de classe $\underline{C^\infty}$ em $\mathbb{R}^2$ (pois são funções polinomiais).

Notemos também que, para $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, teremos:

$$\nabla f(x\,,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\,,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y)\right) \overset{(198)}{=} (y\,,\,x)\,, \tag{201}$$

e

$$\nabla g(x\,,y) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x\,,y)\,,\ \frac{\partial g}{\partial y}(x\,,y)\right) \overset{(200)}{=} (2\,x\,,4\,y) \neq (0\,,0)\,, \tag{202}$$

pois $(0\,,0)$ não pertence ai conjunto (199).

Logo podemos aplicar o Teorema do multiplicador de Lagrange (Teorema 12.1.1, página 365 das notas de aula).

Neste caso, um ponto

$$P_o \doteq (x_o\,,y_o)$$

que satisfaz a condição de ser extremo da função $\underline{f}$, restrita ao vínculo (199), deverá satisfazer, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, as equações:

$$\begin{cases} \nabla f(x_o\,,y_o) = \lambda_o \cdot \nabla g(x_o\,,y_o) \\ g(x_o\,,y_o) = 0 \end{cases} \quad \text{que, de (201), (202) e (199), nos dá:} \quad \begin{cases} (y_o\,,x_o) = \lambda_o\ (2\,x_o\,,4\,y_o)\ , \\ x_o^2 + 2\,y_o^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{ou seja,} \quad \begin{cases} y_o = 2\,\lambda_o\,x_o \\ \\ x_o = 4\,\lambda_o y_o \\ \\ x_o^2 + 2\,y_o^2 - 1 = 0 \end{cases}\,. \tag{203}$$

Se

$$x_o = 0$$

substituindo-se este valor na 1.a equação, segue que

$$y_o = 0\,,$$

e o ponto $(x_o\,,y_o) = (0\,,0)$ não satisfaz ao vínculo (199), portanto $x_o \neq 0$.

De modo análogo, pode-se mostrar que

$$y_o \neq 0\,.$$

Logo, como $x_o\,, y_o \neq 0$, (203) tornar-se-á:

$$\begin{cases} \dfrac{y_o}{2\,x_o} = \lambda_o = \dfrac{x_o}{4\,y_o} \\ \\ x_o^2 + 2\,y_o^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} 4\,y_o^2 = 2\,x_o^2 \\ x_o^2 + 2\,y_o^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{ou ainda,} \quad \begin{cases} 2\,y_o^2 = x_o^2 \\ 2\,y_o^2 = 1 - x_o^2 \end{cases},$$

$$\text{assim} \begin{cases} 2\,y_o^2 = x_o^2 \\ x_o^2 = 1 - x_o^2 \end{cases}, \text{logo} \begin{cases} 2\,y_o^2 = x_o^2 \\ x_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ou} \quad x_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases},$$

$$\text{ou seja,} \begin{cases} y_1 = -\dfrac{1}{2} \quad \text{ou} \quad y_2 = \dfrac{1}{2} \\ x_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ou} \quad x_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}, \tag{204}$$

com isto temos que os pontos

$$P_1 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2} \right), \tag{205}$$

$$P_2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2} \right), \tag{206}$$

$$P_3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2} \right), \tag{207}$$

$$P_4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} \right), \tag{208}$$

são os únicos pontos que satisfazem as condições do Teorema do multiplicador de Lagrange.

Notemos que

$$f(P_1) \overset{(205)}{=} f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2} \right) \overset{(198)}{=} \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4}, \tag{209}$$

$$f(P_2) \overset{(206)}{=} f\left(-\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} \right) \overset{(198)}{=} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}, \tag{210}$$

$$f(P_3) \overset{(207)}{=} f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2} \right) \overset{(198)}{=} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}, \tag{211}$$

$$f(P_4) \overset{(208)}{=} f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} \right) \overset{(198)}{=} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4}. \tag{212}$$

Logo podemos mostrar que a função f tem mínimo global quando restrita ao vínculo (199) nos pontos $P_2 \doteq \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{2} \right)$ e $P_3 \doteq \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{1}{2} \right)$.

Por outro lado a função f tem máximo global quando restrita ao vínculo (199) nos pontos $P_1 \doteq \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{2} \right)$ e $P_4 \doteq \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{1}{2} \right)$.

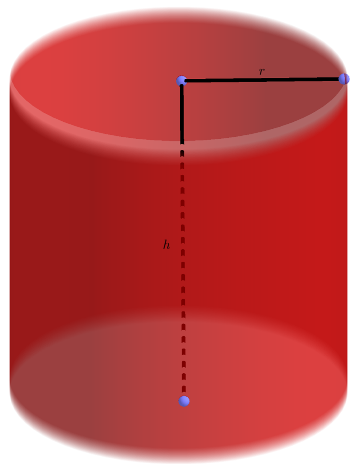
A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

<u>Exercício 12:</u>

Notemos que a área de um cilindro circular reto, com base e sem tampa, cujo raio da base é $r > 0$ e altura $h > 0$, que indicaremos por $A : (0, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$, será dada por

$$A(r, h) \doteq 2\pi r h + \pi r^2, \quad \text{para cada} \quad (r, h) \in (0, \infty) \times (0, \infty). \tag{213}$$

A figura abaixo ilustram o porque do valor encontrado acima:



Sabemos que o volume do sólido que tem o cilindro como superfície é dado por

$$V = \pi r^2 h. \tag{214}$$

Se considerarmos a função $V : (0, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ édada por

$$V(r, h) \doteq \pi r^2 h - 8000, \quad \text{para cada} \quad (r, h) \in (0, \infty) \times (0, \infty). \tag{215}$$

nosso problema torna-se encontrar mínimo da função A sujeita ao vínculo

$$\{(r, h); V(r, h) = 0\}. \tag{216}$$

Observemos que as funções $\underline{A}$ e $\underline{V}$ são de classe $\underline{C^\infty}$ em $(0, \infty) \times (0, \infty)$ (pois são funções polinomiais).

Notemos também que, para $(r, h) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$, teremos:

$$\nabla A(r, h) = \left(\frac{\partial A}{\partial r}(r, h), \frac{\partial A}{\partial h}(r, h)\right) \overset{(213)}{=} (2\pi h + 2\pi r, 2\pi r), \tag{217}$$

e

$$\nabla V(r, h) = \left(\frac{\partial V}{\partial r}(r, h), \frac{\partial V}{\partial h}(r, h)\right) \overset{(215)}{=} \left(2\pi r h, \pi r^2\right) \neq (0, 0), \tag{218}$$

pois $(0, 0)$ não pertence ai conjunto (216).

Logo podemos aplicar o Teorema do multiplicador de Lagrange (Teorema 12.1.1, página 365 das notas de aula).

Neste caso, um ponto

$$P_o \doteq (r_o, h_o)$$

que satisfaz a condição de ser extremo da função $\underline{A}$, restrita ao vínculo (216), deverá satisfazer, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, as equações:

$$\begin{cases} \nabla A(r_o\,,h_o) = \lambda_o \cdot \nabla V(r_o\,,h_o) \\ V(r_o\,,h_o) = 0 \end{cases} \quad \text{que, de (217), (218) e (216), nos dá:}$$

$$\begin{cases} (2\,\pi\,h_o + 2\,\pi\,r_o\,,\,2\,\pi\,r_o) = \lambda_o\,\left(2\,\pi\,r_o\,h_o\,,\pi\,r_o^2\right)\,, \\ \pi\,r_o^2\,h_o - 8000 = 0 \end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} 2\,\pi\,h_o + 2\,\pi\,r_o = 2\,\lambda_o\,\pi\,r_o\,h_o \\ 2\,\pi\,r_o = \lambda_o \pi\,r_o^2 \\ \pi\,r_o^2\,h_o - 8000 = 0 \end{cases}$$

$$\text{ou ainda, } (r_o > 0) \quad \begin{cases} h_o + r_o = \lambda_o\,r_o\,h_o \\ 2 = \lambda_o\,r_o \\ h_o = \dfrac{8000}{\pi\,r_o^2} \end{cases} \quad \text{ou,} \quad \begin{cases} h_o + r_o = \dfrac{2}{r_o}\,r_o\,h_o \\ \lambda_o = \dfrac{2}{r_o} \\ h_o = \dfrac{8000}{\pi\,r_o^2} \end{cases} \quad \text{ou,} \quad \begin{cases} h = r_o = h_o \\ \lambda_o = \dfrac{2}{r_o} \\ h_o = \dfrac{8000}{\pi\,r_o^2} \end{cases}$$

$$\text{ou,} \quad \begin{cases} r_o = \dfrac{\sqrt{8000\,\pi}}{\pi} \\ h_o = \dfrac{\sqrt{8000\,\pi}}{\pi} \\ \lambda_o = \dfrac{2\,\pi}{\sqrt{8000\,\pi}} \end{cases} . \tag{219}$$

com isto temos que o ponto

$$P_o \doteq \left(\frac{\sqrt{8000\,\pi}}{\pi}\,,\frac{\sqrt{8000\,\pi}}{\pi}\right)\,, \tag{220}$$

é o único ponto que satisfaz as condições do Teorema do multiplicador de Lagrange.

Notemos que

$$A(P_o) \overset{(220)}{=} A\left(\frac{\sqrt{8000\,\pi}}{\pi}\,,\frac{\sqrt{8000\,\pi}}{\pi}\right) \overset{(213)}{=} 2\,\pi\,\frac{\sqrt{8000\,\pi}}{\pi}\,\frac{\sqrt{8000\,\pi}}{\pi} + \pi\,\left(\frac{\sqrt{8000\,\pi}}{\pi}\right)^2 = 24000\,, \tag{221}$$

Logo podemos mostrar que a função A tem mínimo global quando restrita ao vínculo (216) no ponto $P_o \doteq \left(\dfrac{\sqrt{8000\,\pi}}{\pi}\,,\dfrac{\sqrt{8000\,\pi}}{\pi}\right)$.

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

<u>Exercício 13:</u>

Semelhante ao Exercício 12.

A função que nos fornece a área da superfície do cilindro reto, cujo raio da base é $r > 0$ e altura $h > 0$, com base e tampa, que indicaremos por $A : (0\,,\infty) \times (0\,,\infty) \to \mathbb{R}$, será dada por

$$A(r\,,h) \doteq 2\,\pi\,r\,h + 2\,\pi\,r^2\,, \quad \text{para cada} \quad (r\,,h) \in (0\,,\infty) \times (0\,,\infty)\,. \tag{222}$$

e se considerarmos a função $V : (0\,,\infty) \times (0\,,\infty) \to \mathbb{R}$ édada por

$$V(r\,,h) \doteq \pi\, r^2\, h - 16\,\pi\,, \quad \text{para cada} \quad (r\,,h) \in (0\,,\infty) \times (0\,,\infty)\,. \tag{223}$$

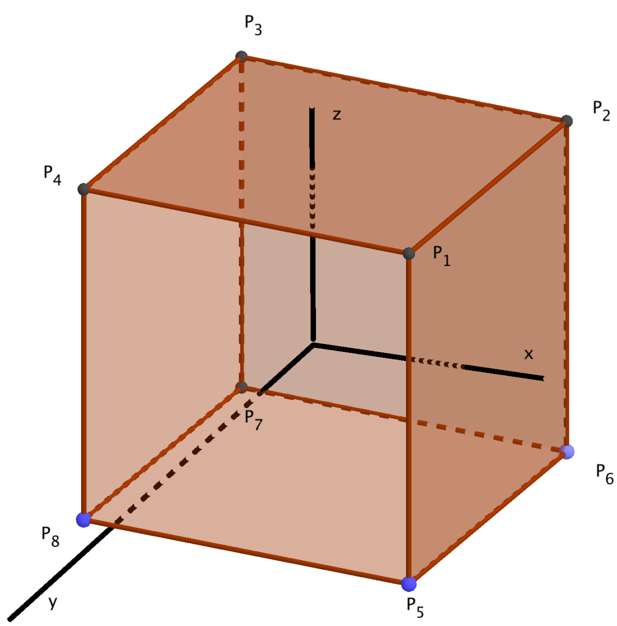
nosso problema torna-se encontrar mínimo da função A sujeita ao vínculo

$$\{(r\,,h)\,;\, V(r\,,h) = 0\}\,. \tag{224}$$

Exercício 14:

Sejam $P_1\,, P_2\,, P_3\,, P_4\,, P_5\,, P_6\,, P_7\,, P_8$ os vértices do paralelepípedo retângulo que pertencem a esfera unitária centrada na origem.

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



Notemos que do fato do paralelepípedo ser retângulo e seus vértices pertencerem a esfera unitária centrada na origem, que é simétrica em relação ao todos os planos coordenados (a saber, xOy, xOz e yOz), se

$$P_1 \doteq (x\,,y\,,z) \tag{225}$$

da simetria (veja figura acima) teremos:

$$P_2 \doteq (x\,,-y\,,z)\,, \tag{226}$$
$$P_3 \doteq (-x\,,-y\,,z)\,, \tag{227}$$
$$P_4 \doteq (-x\,,y\,,z)\,, \tag{228}$$
$$P_5 \doteq (x\,,y\,,-z)\,, \tag{229}$$
$$P_6 \doteq (x\,,-y\,,-z)\,, \tag{230}$$
$$P_7 \doteq (-x\,,y\,,-z)\,, \tag{231}$$
$$P_8 \doteq (-x\,,-y\,,-z)\,. \tag{232}$$

Logo, para cada $(x, y, z) \in [0, \infty) \times [0, \infty) \times [0, \infty)$, o volume do paralelepípedo relativo ao vértice $P_1 \doteq (x, y, z)$ será:

$$V(x, y, z) \doteq (2x)(2y)(2z) = 8xyz. \tag{233}$$

Logo se $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por

$$g(x, y, z) \doteq x^2 + y^2 + z^2 - 1, \quad \text{para cada} \quad (x, y, z) \in [0, \infty) \times [0, \infty) \times [0, \infty) \tag{234}$$

então a esfera de centro na origem e raio unitário será

$$\{(x, y, z) \in (0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, \infty);\ g(x, y, z) = 0\}. \tag{235}$$

Portanto basta encontrar o máximo da função V restrita ao vínculo (235).

Observemos que as funções $\underline{V}$ e $\underline{g}$ são de classe $\underline{C^\infty}$ em $(0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, \infty)$ (pois são funções polinomiais).

Notemos também que, para $(x, y, z) \in (0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, \infty)$, teremos:

$$\begin{aligned}
\nabla V(x, y, z) &= \left(\frac{\partial V}{\partial x}(x, y, z),\ \frac{\partial V}{\partial y}(x, y, z),\ \frac{\partial V}{\partial z}(x, y z)\right) \\
&\overset{(233)}{=} (8yz,\ 8xz,\ 8xy), \qquad (236) \\
\text{e} \\
\nabla g(x, y, z) &= \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z),\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z),\ \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z)\right) \\
&\overset{(263)}{=} (2x, 2y, 2z) \neq (0, 0, 0), \qquad (237)
\end{aligned}$$

pois o ponto $(0, 0, 0)$ não pertence a esfera unitária de centro na origem

Logo podemos aplicar o Teorema do multiplicador de Lagrange (Teorema 12.1.1, página 365 das notas de aula).

Neste caso, um ponto

$$P_o \doteq (x_o, y_o, z_o) \in (0, \infty)^3$$

que satisfaz a condição de maximizar a função $\underline{f}$, restrita ao vínculo (159), deverá satisfazer, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, as equações:

$$\begin{cases} \nabla V(x_1, y_1, z_1) = \lambda_1 \cdot \nabla g(x_1, y_1, z_1) \\ g(x_1, y_1, z_1) = 0 \end{cases}$$

que, de (236) e (237), é o mesmo que: $\begin{cases} (8y_o z_o,\ 8x_o z_o,\ 8x_o y_o) = \lambda_o (2x_o, 2y_o, 2z_o), \\ x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 - 1 = 0 \end{cases}$

$$\text{ou seja, } \begin{cases} 8y_o z_o = \lambda_o 2x_o \\ 8x_o z_o = \lambda_o 2y_o \\ 8x_o y_o = \lambda_o 2z_o \\ x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 - 1 = 0 \end{cases}, \quad \text{ou ou seja, } \begin{cases} 4y_o z_o = \lambda_o x_o \\ 4x_o z_o = \lambda_o y_o \\ 4x_o y_o = \lambda_o z_o \\ x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 - 1 = 0 \end{cases}. \tag{238}$$

Notemos que se

$$\lambda_o = 0$$

das 3.as primeiras equações de (238) teríamos

$$x_o = y_o = z_o = 0$$

e o ponto $(0\,,0\,,0)$ não pertence à esfera de centro na origem e raio unitário, logo devemos ter

$$\lambda_o \neq 0\,,$$

Se

$$x_o = 0$$

das 2.a e 3.a equações de (238) teríamos

$$y_o = z_o = 0$$

e novamente, sabemos que Além disso, se o ponto $(0\,,0\,,0)$ não pertence à esfera de centro na origem e raio unitário, logo devemos ter

$$x_o > 0\,,$$

De modo semelhante mostra-se que

$$y_o\,, z_o > 0\,.$$

Logo

$$x_o\,, y_o\,, z_o > 0\,.$$

Logo (238) tornar-se-á

$$\begin{cases} \dfrac{4\,y_o\,z_o}{x_o} = \lambda_o \\ \dfrac{4\,x_o\,z_o}{y_o} = \lambda_o \\ \dfrac{4\,x_o\,y_o}{z_o} = \lambda_o \\ x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 - 1 = 0 \end{cases} \qquad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} \dfrac{4\,y_o\,z_o}{x_o} = \dfrac{4\,x_o\,z_o}{y_o} = \dfrac{4\,x_o\,y_o}{z_o} = \lambda_o \\ x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad ,$$

$$\text{ou ainda,} \quad \begin{cases} \dfrac{y_o\,z_o}{x_o} = \dfrac{x_o\,z_o}{y_o} = \dfrac{x_o\,y_o}{z_o} = \lambda_o \\ x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 - 1 = 0\,. \end{cases} \quad , \quad \text{isto é,} \quad \begin{cases} y_o^2\,z_o = x_o^2\,z_o \\ y_o\,z_o^2 = x_o^2\,y_o \\ x_o\,z_o^2 = x_o\,y_o^2 \\ x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad ,$$

$$\text{mas } x_o, y_o, z_o \neq 0, \quad \begin{cases} y_o^2 = x_o^2 \\ z_o^2 = x_o^2 \\ z_o^2 = y_o^2 \\ x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad , \text{ na verdade, } x_o, y_o, z_o > 0: \quad \begin{cases} x_o = \frac{\sqrt{3}}{3}\,, \\ y_o = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\,, \\ z_o = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\,, \end{cases}$$

Logo o ponto

$$P_1 \doteq \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\,, \frac{\sqrt{3}}{3}\,, \frac{\sqrt{3}}{3} \right)\,,$$

será o único ponto que satisfaz as condições do Teorema do multiplicador de Lagrange.

Desta forma, de (225) até (232), teremos que vértices do paralelepípedo retângulo de volume máximo, que pertencem a esfera unitária centrada na origem serão

$$
\begin{aligned}
P_1 &\doteq \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \\
P_2 &\doteq \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \\
P_3 &\doteq \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \\
P_4 &\doteq \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \\
P_5 &\doteq \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \\
P_6 &\doteq \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \\
P_7 &\doteq \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right). \\
P_8 &\doteq \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right),
\end{aligned}
$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Exercício 15:

Temos que encontrar os extremos da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x, y, z) \doteq x^2 y z + 1, \quad \text{para cada} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \tag{239}$$

restrita a intersecção do plano

$$z = 1, \tag{240}$$
$$\text{com a esfera} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 10. \tag{241}$$

Notemos que se considerarmos as funções $g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por

$$g(x, y, z) \doteq z - 1, \tag{242}$$
$$\text{e} \quad h(x, y, z) \doteq x^2 + y^2 + z^2 - 10, \quad \text{para cada} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \tag{243}$$

então precisamos encontrar os extremos da função f restritas aos vínculos

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; g(x, y, z) = 0\}, \tag{244}$$
$$\text{e} \quad \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; h(x, y, z) = 0\}, \tag{245}$$

Para tanto utilizaremos o Teorema de multiplicadores de Lagrange para dois vínculos (veja o Teorema 13.1.1, página 383 das notas de aula).

Notemos que as funções f, g, h são de classe C^∞ em $\mathbb{R}^3$ (pois são funções polinomiais).

Além disso, se $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, teremos

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z),\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y z) \right) \overset{(239)}{=} (2\,x\,y\,z,\ x^2\,z,\ x^2\,y), \tag{246}$$

e

$$\nabla g(x, y, z) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z),\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z),\ \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) \right) \overset{(242)}{=} (0, 0, 1), \tag{247}$$

$$\nabla h(x, y, z) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}(x, y, z),\ \frac{\partial h}{\partial y}(x, y, z),\ \frac{\partial h}{\partial z}(x, y, z) \right) \overset{(243)}{=} (2\,x, 2\,y, 2\,z). \tag{248}$$

Neste caso, um ponto

$$P_o \doteq (x_o, y_o, z_o) \in (0, \infty)^3$$

que satisfaz a condição de maximizar a função $\underline{f}$, restrita aoS vínculos (244) e (245), deverão existir $\lambda_o, \mu_o \in \mathbb{R}$, tal que:

$$\begin{cases} \nabla f(x_o, y_o, z_o) = \lambda_o \cdot \nabla g(x_o, y_o, z_o) + \mu_o \cdot \nabla h(x_o, y_o, z_o) \\ g(x_o, y_o, z_o) = 0 \\ h(x_o, y_o, z_o) = 0 \end{cases}$$

e, de (246), (247), (248), (244) e (245), teremos:

$$\begin{cases} (2\,x_o\,y_o\,z_o,\ x_o^2\,z_o,\ x_o^2\,y_o) = \lambda_o\,(0, 0, 1) + \mu_o\,(2\,x_o, 2\,y_o, 2\,z_o) \\ z_o = 1 \\ x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 - 10 = 0 \end{cases} \quad \text{ou seja} \quad \begin{cases} 2\,x_o\,y_o\,z_o = \mu_o\,2\,x_o \\ x_o^2\,z_o = \mu_o\,2\,y_o \\ x_o^2\,y_o = \lambda_o + \mu_o\,2\,z_o \\ z_o = 1 \\ x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 - 10 = 0 \end{cases},$$

$$\text{como } z_o = 1: \quad \begin{cases} x_o\,y_o = \mu_o\,x_o \\ x_o^2 = 2\,\mu_o\,y_o \\ x_o^2\,y_o = \lambda_o + 2\,\mu_o \\ z_o = 1 \\ x_o^2 + y_o^2 - 9 = 0 \end{cases}. \tag{249}$$

Notemos que se

$$x_o = 0,$$

na 5.a equação teremos

$$0^2 + y_o^2 - 9 = 0, \text{ logo } y_1 \doteq -3 \text{ e } y_2 \doteq 3$$

ou seja, os pontos

$$P_1 \doteq (0, -3, 1) \text{ e } P_1 \doteq (0, 3, 1) \tag{250}$$

satisfazem as condições do Teorema dos multiplicadores de Lagrange.

Se

$$x_o \neq 0$$

(249) tornar-se-á

$$\begin{cases} y_o = \mu_o \\ x_o^2 = 2\,\mu_o\, y_o \\ x_o^2\, y_o = \lambda_o + 2\,\mu_o \\ z_o = 1 \\ x_o^2 + y_o^2 - 9 = 0 \end{cases} , \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y_o = \mu_o \\ x_o^2 = 2\, y_o^2 \\ x_o^2\, y_o = \lambda_o + 2\, y_o \\ z_o = 1 \\ x_o^2 + y_o^2 - 9 = 0 \end{cases} , \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y_o = \mu_o \\ x_o^2 = 2\, y_o^2 \\ x_o^2\, y_o = \lambda_o + 2\, y_o \\ z_o = 1 \\ 2\, y_o^2 + y_o^2 - 9 = 0 \end{cases} ,$$

$$\text{ou} \quad \begin{cases} y_o = \mu_o \\ x_o = \pm\sqrt{2}\, y_o \\ x_o^2\, y_o = \lambda_o + 2\, y_o \\ z_o = 1 \\ y_o = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} , \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y_o = \mu_o \\ x_o = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{3} \\ x_o^2\, y_o = \lambda_o + 2\, y_o \\ z_o = 1 \\ y_o = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \tag{251}$$

ou seja, os pontos

$$\begin{aligned} & P_3 \doteq \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right), \ P_4 \doteq \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right), \ P_5 \doteq \left(\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right), \\ & \text{e} \ \ P_6 \doteq P_3 \doteq \left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right), \end{aligned} \tag{252}$$

satisfazem as condições do Teorema dos multiplicadores de Lagrange.

Notemos que

$$\begin{aligned} f(P_1) &\overset{(250)}{=} f(0, -3, 1) \overset{(239)}{=} 0^2 \cdot (-3) \cdot 1 + 1 = 1, \\ f(P_2) &\overset{(250)}{=} f(0, 3, 1) \overset{(239)}{=} 0^2 \cdot 3 \cdot 1 + 1 = 1, \\ f(P_3) &\overset{(252)}{=} f\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right) \overset{(239)}{=} \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot 1 + 1 = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}, \\ f(P_4) &\overset{(252)}{=} f\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right) \overset{(239)}{=} \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot 1 + 1 = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}, \\ f(P_5) &\overset{(252)}{=} f\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right) \overset{(239)}{=} \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot 1 + 1 = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}, \\ f(P_6) &\overset{(252)}{=} f\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right) \overset{(239)}{=} \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot 1 + 1 = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}. \end{aligned} \tag{253}$$

Como

$$1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} < 1 < 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Portanto pode-se mostrar que a função f tem máximo quando restrita aos vínculos (244) e (245) nos pontos

$$P_4 \doteq \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right) \quad \text{e} \quad P_6 \doteq \left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$$

e tem mínimo quando restrita aos vínculos (244) e (245) nos pontos

$$P_3 \doteq \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right) \quad \text{e} \quad P_4 \doteq \left(\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right).$$

Deixaremos a verificação destes fatos como exercícios para o leitor.

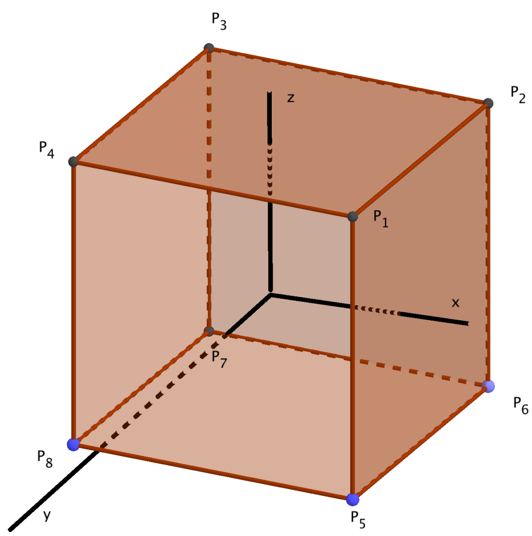
Exercício 16:

É semelhante ao Exercício 14.

Notemos que se $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8$ os vértices do paralelepípedo retângulo que pertencem ao elipsóide

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{36} = 1.$$

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



Notemos que do fato do paralelepípedo ser retângulo e seus vértices pertencerem a esfera unitária centrada na origem, que é simétrica em relação ao todos os planos coordenados (a saber, xOy, xOz e yOz), se

$$P_1 \doteq (x, y, z) \tag{254}$$

da simetria (veja figura acima) teremos:

$$P_2 \doteq (x, -y, z), \tag{255}$$
$$P_3 \doteq (-x, -y, z), \tag{256}$$
$$P_4 \doteq (-x, y, z), \tag{257}$$
$$P_5 \doteq (x, y, -z), \tag{258}$$
$$P_6 \doteq (x, -y, -z), \tag{259}$$
$$P_7 \doteq (-x, y, -z), \tag{260}$$
$$P_8 \doteq (-x, -y, -z). \tag{261}$$

Logo, para cada $(x, y, z) \in (0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, \infty)$, o volume do paralelepípedo relativo ao vértice $P_1 \doteq (x, y, z)$ será:

$$V(x, y, z) \doteq (2x)(2y)(2z) = 8xyz. \tag{262}$$

Logo se $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por

$$g(x, y, z) \doteq \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{36}, \quad \text{para cada} \quad (x, y, z) \in (0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, \infty) \tag{263}$$

então o elipsóide em questão será

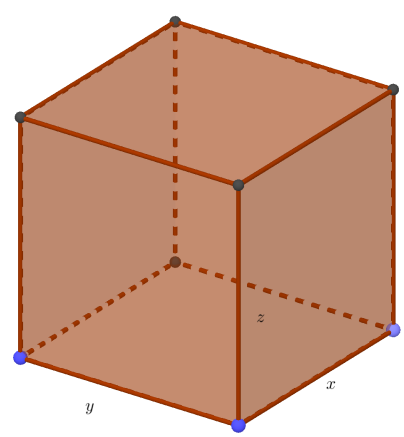
$$\{(x, y, z) \in (0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, \infty);\, g(x, y, z) = 0\}. \tag{264}$$

Portanto basta encontrar o máximo da função V restrita ao vínculo (264), assim podemos aplicar o Teorema do multiplicador de Lagrange para um vínculo.

Exercício 17:

Sejam $x, y, z \in (0, \infty)$ as dimensões de uma caixa fechada (ou seja, com tampa) em forma de um paralelepípedo retângulo.

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



Consideremos a função $V : (0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$, dada por

$$V(x, y, z) \doteq xyz, \quad \text{para cada} \quad (x, y, z) \in (0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, \infty), \tag{265}$$

que nos fornece o volume do paralelepípedo retângulo cujas dimensões são x, y, z, como na figura acima.

Notemos que a função que nos fornece a área lateral do paralelepípedo retângulo cujas dimensões são x, y, z (figura acima), indicada por $A_l : (0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$, será dada por

$$A_{l1}(x, y, z) \doteq 2xz, \tag{266}$$

$$A_{l2}(x, y, z) \doteq 2yz, \quad \text{para cada} \quad (x, y, z) \in (0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, \infty), \tag{267}$$

e a função que nos fornece as áreas das base e da tampa do paralelepípedo retângulo cujas dimensões são x, y, z (figura acima), indicada por $A_b, A_t : (0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$, será dada por

$$A_b(x, y, z) \doteq 2xy, \tag{268}$$

$$A_t(x, y, z) \doteq 2xy, \quad \text{para cada} \quad (x, y, z) \in (0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, \infty). \tag{269}$$

Portanto a função que irá descrever o custo para a construção da caixa em forma de paralelepípedo retângulo cujas dimensões são x, y, z (figura acima), indicada por $C : (0,\infty) \times (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$, dada por

$$\begin{aligned}
C(x,y,z) &\doteq 6\,A_{l1}(x,y,z) + 4\,A_{l2}(x,y,z) + 3\,A_b(x,y,z) + 3\,A_t(x,y,z) \overset{(266),(267),(268),(269)}{=} \\
&= (12\,x\,z) + (8\,y\,z) + (3\,x\,y) + (3\,x\,y) \\
&= 12\,x\,z + 8\,y\,z + 6\,x\,y\,, \quad \text{para cada} \quad (x,y,z) \in (0,\infty) \times (0,\infty) \times (0,\infty)\,. \qquad (270)
\end{aligned}$$

Notemos que queremos minimizar a função custo C, satisfazendo o vínculo

$$\{(x,y,z)\,;\, V(x,y,z) = 30\}. \qquad (271)$$

Observemos que as funções $\underline{V}$ e $\underline{C}$ são de classe $\underline{C^\infty}$ em $(0,\infty) \times (0,\infty) \times (0,\infty)$ (pois são funções polinomiais).

Notemos também que, para $(x,y,z) \in (0,\infty) \times (0,\infty) \times (0,\infty)$, teremos:

$$\nabla C(x,y,z) = \left(\frac{\partial C}{\partial x}(x,y,z)\,,\, \frac{\partial C}{\partial y}(x,y,z)\,,\, \frac{\partial C}{\partial z}(x,y,z)\right) \overset{(270)}{=} (12\,z + 6\,y\,, 8\,z + 6\,x\,, 12\,x + 8\,y)\,, \qquad (272)$$

$$\text{e } \nabla V(x,y,z) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}(x,y,z)\,,\, \frac{\partial V}{\partial y}(x,y,z)\,,\, \frac{\partial V}{\partial z}(x,y,z)\right) \overset{(265)}{=} (y\,z\,, x\,z\,, x\,y) \neq (0,0,0)\,, \qquad (273)$$

pois $(0,0,0)$ não pertence ao conjunto (271).

Logo podemos aplicar o Teorema do multiplicador de Lagrange (Teorema 12.1.1, página 365 das notas de aula).

Neste caso, um ponto

$$P_o \doteq (x_o\,, y_o\, z_o) \in (0,\infty)^3$$

que satisfaz a condição de ser extremo da função $\underline{C}$, restrita ao vínculo (271), deverá satisfazer, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, as equações:

$$\begin{cases} \nabla C(x_o\,, y_o\,, z_o) = \lambda_o \cdot \nabla V(x_o\,, y_o\,, z_o) \\ V(x_o\,, y_o\,, z_o) = 30 \end{cases} \quad \text{que, de (272), (273) e (265), nos dá:}$$

$$\begin{cases} (12\,z_o + 6\,y_o\,, 8\,z_o + 6\,x_o\,, 12\,x_o + 8\,y_o) = \lambda_o\, (y_o\,z_o\,, x_o\,z_o\,, x_o\,y_o)\,, \\ x_o\,y_o\,z_o = 30 \end{cases}$$

$$\text{ou seja,} \quad \begin{cases} 12\,z_o + 6\,y_o = \lambda_o\,y_o\,z_o \\ 8\,z_o + 6\,x_o = \lambda_o\,x_o\,z_o \\ 12\,x_o + 8\,y_o = \lambda_o\,x_o\,y_o \\ x_o\,y_o\,z_o = 30 \end{cases}. \qquad (274)$$

Resolvendo o sistema acima obtemos o ponto $P_o = (x_o\,, y_o\,, z_o) \in (0,\infty)^3$ será o ponto que satisfaz as condições do Teorema do multiplicador de Lagrange, que podemos mostrar que é o ponto procurado.

Deixaremos como exercício para o leitor completar os detalhes das contas.

Exercício 18:

Notemos que se $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$ é dada por

$$f(x,y) \doteq \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y) + \operatorname{sen}(x+y)\,, \quad \text{para cada} \quad (x,y) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad (275)$$

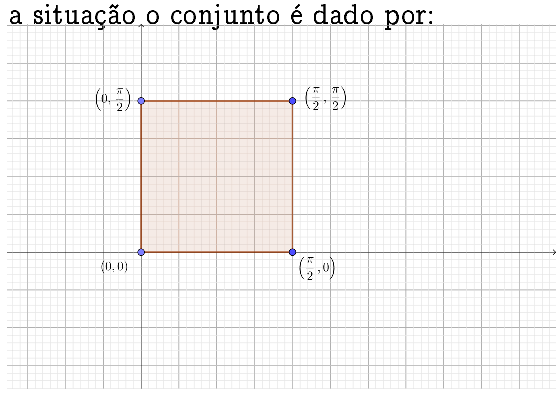
como a função f é contínua e o conjunto $\left[0\,,\dfrac{\pi}{2}\right]$ é limitado e fechado, sabemos que a função f terá extremos globais no conjunto $\left[0\,,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Para encontrar tais pontos, faremos o seguinte:

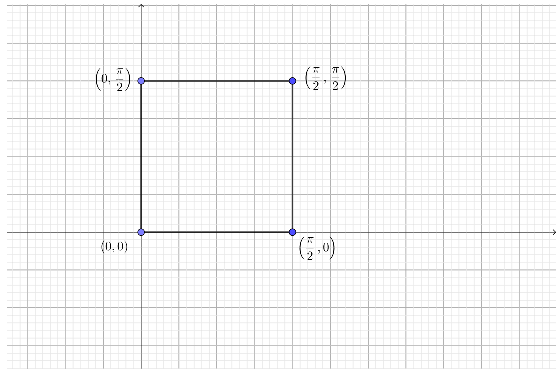
1. encontremos os pontos críticos da função f no interior do conjunto $\left[0\,,\dfrac{\pi}{2}\right] \times \left[0\,,\dfrac{\pi}{2}\right]$, ou seja, que pertencem ao conjunto
$$\left(0\,,\frac{\pi}{2}\right) \times \left(0\,,\frac{\pi}{2}\right)\;;$$

2. encontremos os extremos da função f quando restrita à fronteira do conjunto $\left[0\,,\dfrac{\pi}{2}\right] \times \left[0\,,\dfrac{\pi}{2}\right]$, ou seja
$$\{0\} \times \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right] \cup \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \cup \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right] \times \{0\} \cup \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right] \times \left\{\frac{\pi}{2}\right\}\;.$$

A figura abaixo ilustra a situação o conjunto é dado por:



e a figura abaixo ilustra a situação da fronteira é dado por:



O maior valor da função nos pontos obtidos nos itens acima será o máximo da função f no conjunto $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ e o menor valor da função nos pontos obtidos nos itens acima será o mínimo da função f no conjunto $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$.

Para o item 1., basta encontrar os pontos onde a função gradiente de f se anula, que pertencem ao conjunto $\left(0\,,\frac{\pi}{2}\right)\times\left(0\,,\frac{\pi}{2}\right)$, ou seja, $(x\,,y)\in\left(0\,,\frac{\pi}{2}\right)\times\left(0\,,\frac{\pi}{2}\right)$, tal que

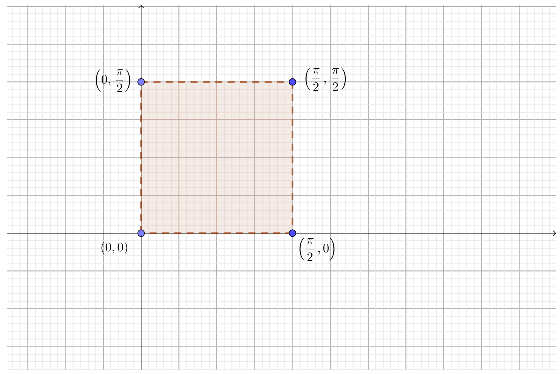
$$(0\,,0)=\nabla f(x\,,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\,,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y)\right)\overset{(275)}{=}(\cos(x)+\cos(x+y)\,,\cos(y)+\cos(x+y))$$

ou seja, $$\begin{cases}\cos(x)+\cos(x+y)=0\\ \cos(y)+\cos(x+y)=0\end{cases}. \tag{276}$$

Deixaremos a resolução como exercícios para o leitor.

Obtendo-se as soluções do sistema acima verificamos quais pontos pertencerão ao conjunto $\left(0\,,\frac{\pi}{2}\right)\times\left(0\,,\frac{\pi}{2}\right)$.

A figura abaixo ilustra as situações descritas acima:



Calcule os valores da função f nos valores que satisfazem a condição acima.

Para o 2.o item precisamos restringir a função f a cada um dos segmentos que definem a fronteira do conjunto $\{0\} \times \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right] \cup \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \cup \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right] \times \{0\} \cup \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right] \times \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

Para tanto notemos que se a função $g_1 : \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ é dada por

$$g_1(x) \doteq (x\,,0)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]\,, \tag{277}$$

temos que a representação geométrica do gráfico da função g_1 será o segmento de reta $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right] \times \{0\}$.

Se a função $g_2 : \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ é dada por

$$g_2(x) \doteq \left(x\,,\frac{\pi}{2}\right)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]\,, \tag{278}$$

temos que a representação geométrica do gráfico da função g_1 será o segmento de reta $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right] \times \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

Se a função $h_1 : \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ é dada por

$$h_1(y) \doteq (0\,,y)\,, \quad \text{para cada} \quad y \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]\,, \tag{279}$$

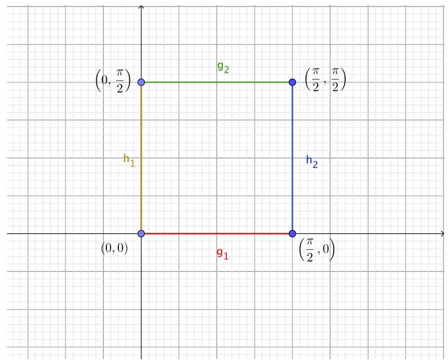
temos que a representação geométrica do gráfico da função h_1 será o segmento de reta $\{0\} \times \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$.

Por fim, se a função $h_2 : \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ é dada por

$$h_2(y) \doteq \left(\frac{\pi}{2}\,,y\right)\,, \quad \text{para cada} \quad y \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]\,, \tag{280}$$

temos que a representação geométrica do gráfico da função h_2 será o segmento de reta $\left\{\frac{\pi}{2}\right\} \times \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$.

A figura abaixo ilustra as situações descritas acima:



Portanto temos que encontrar os valores dos extremos das restrições das função f a cada um dos segmentos de reta $\{0\} \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \{0\} \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, ou seja, das funções $f \circ g_1, f \circ g_2 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ e $f \circ h_1, f \circ h_2 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, com isto finalizamos o item 2. .

Deixaremos esses cálculos como exercício para o leitor.

Para terminar, para encontrarmos o máximo globais da função f no conjunto $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, consideramos o maior valor entre todos os valores obtidos nos pontos obtidos nos itens 1. e 2. e o menor valor será o valor mínimo global da função f no conjunto $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercício 19:

Notemos que se $f : [0, 2] \times [-1, 2] \to \mathbb{R}^2$ é dada por

$$f(x, y) \doteq x^3 + y^3 - 3xy, \quad \text{para cada} \quad (x, y) \in [0, 2] \times [-1, 2] \tag{281}$$

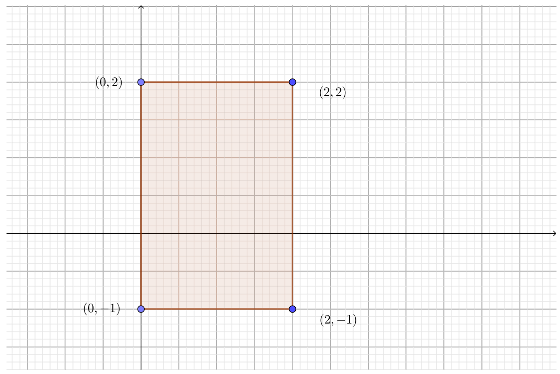
como a função f é contínua e o conjunto $[0, 2] \times [-1, 2]$ é limitado e fechado, sabemos que a função f terá extremos globais no conjunto $[0, 2] \times [-1, 2]$.

Para encontrar tais pontos, faremos o seguinte:

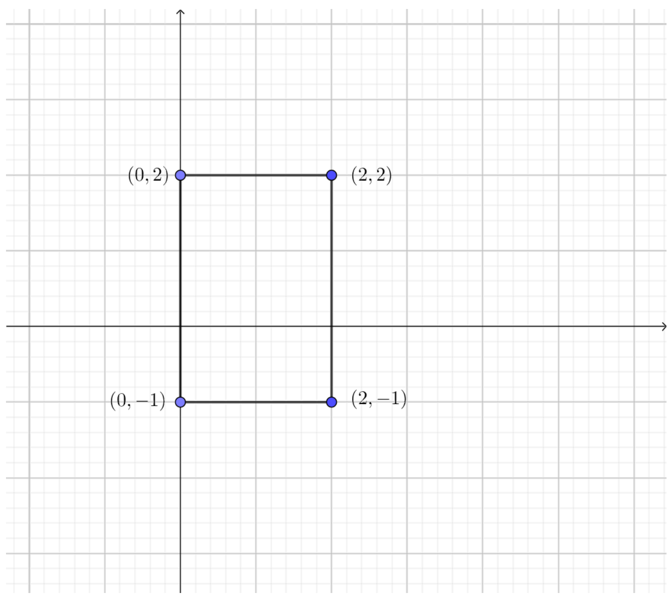
1. encontremos os pontos críticos da função f no interior do conjunto $[0, 2] \times [-1, 2]$, ou seja, que pertencem ao conjunto
$$(0, 2) \times (-1, 2);$$

2. encontremos os extremos da função f quando restrita à fronteira do conjunto $[0, 2] \times [-1, 2]$, ou seja
$$\{0\} \times [-1, 2] \cup \{2\} \cup [-1, 2] \cup [0, 2] \times \{-1\} \cup [0, 2] \times \{2\}.$$

A figura abaixo ilustra a situação o conjunto é dado por:



e a figura abaixo ilustra a situação da fronteira é dado por:



O maior valor da função nos pontos obtidos nos itens acima será o máximo da função f no conjunto $[0,2] \times [-1,2]$ e o menor valor da função nos pontos obtidos nos itens acima será o mínimo da função f no conjunto $[0,2] \times [-1,2]$.

Para o item 1., basta encontrar os pontos onde a função gradiente de f se anula, que pertencem ao conjunto $(0,2) \times (-1,2)$, ou seja, $(x,y) \in (0,2) \times (-1,2)$, tal que

$$(0,0) = \nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) \overset{(281)}{=} (3x^2 - 3y,\, 3y^2 - 3x)$$

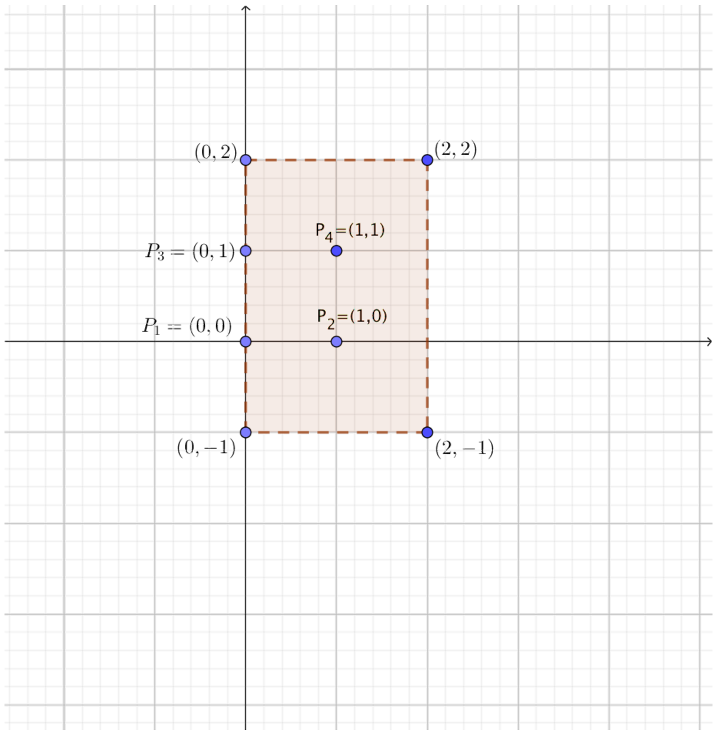
$$\text{ou seja, } \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \quad \text{ou, } \begin{cases} y = x^2 \\ y^2 - x = 0 \end{cases} \quad \text{ou, } \begin{cases} y = x^2 \\ x^4 - x = 0 \end{cases}$$

$$\text{logo, } \begin{cases} y = x^2 \\ x_1 \doteq 1 \quad \text{ou} \quad x_2 \doteq 0 \end{cases}, \text{ assim, } \begin{cases} y_1 \doteq 1 \quad \text{ou} \quad y_2 \doteq 0 \\ x_1 \doteq 1 \quad \text{ou} \quad x_2 \doteq 0 \end{cases}. \tag{282}$$

Logo da situação acima temos os seguintes pontos

$$P_1 \doteq (0,0),\ P_2 \doteq (1,0),\ P_3 \doteq (0,1) \ \text{ e } \ P_4 \doteq (1,1). \tag{283}$$

Notemos que só os pontos P_2 e P_4 pertencem ao conjunto $(0,2) \times (-1,2)$.



A figura abaixo ilustra a situação acima:
Notemos que

$$f(P_2) \overset{(283)}{=} f(1\,,0) \overset{(283)}{=} 1^3 + 0^3 - 3 \cdot 1 \cdot 0 = 1 \tag{284}$$

$$f(P_4) \overset{(283)}{=} f(1\,,1) \overset{(283)}{=} 1^3 + 1^3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 = -1 \tag{285}$$

Para o 2.o item precisamos restringir a função f a cada um dos segmentos que definem a fronteira do conjunto $[0\,,2] \times [-1\,,2]$, ou seja, $\{0\} \times [-1\,,2] \cup \{2\} \cup [-1\,,2] \cup [0\,,2] \times \{-1\} \cup [0\,,2] \times \{2\}$.

Para tanto notemos que se a função $g_1 : [0\,,2] \to \mathbb{R}$ é dada por

$$g_1(x) \doteq (x\,,-1)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [0\,,2]\,, \tag{286}$$

temos que a representação geométrica do gráfico da função g_1 será o segmento de reta $[0\,,2] \times \{-1\}$.

Se a função $g_2 : [0\,,2] \to \mathbb{R}$ é dada por

$$g_2(x) \doteq (x\,,2)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [0\,,2]\,, \tag{287}$$

temos que a representação geométrica do gráfico da função g_1 será o segmento de reta $[0\,,2] \times \{2\}$.

Se a função $h_1 : [-1\,,2] \to \mathbb{R}$ é dada por

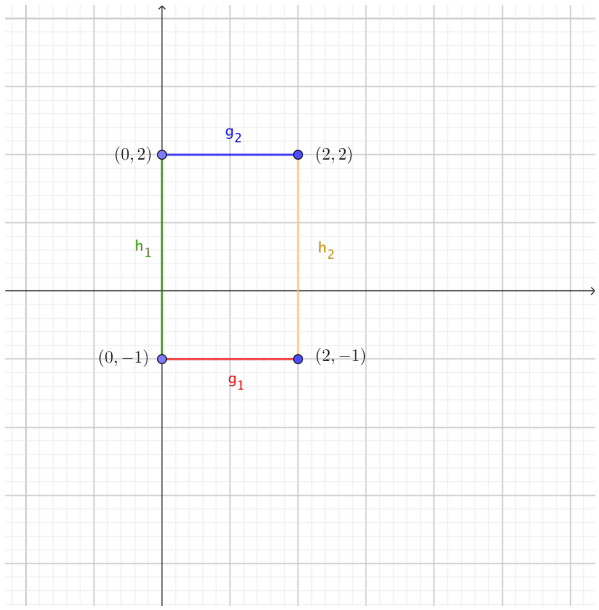
$$h_1(y) \doteq (0\,,y)\,, \quad \text{para cada} \quad y \in [-1\,,2]\,, \tag{288}$$

temos que a representação geométrica do gráfico da função h_1 será o segmento de reta $\{0\} \times [-1\,,2]$.

Por fim, se a função $h_1 : [-1\,,2] \to \mathbb{R}$ é dada por

$$h_2(y) \doteq (2\,,y)\,, \quad \text{para cada} \quad y \in [-1\,,2]\,, \tag{289}$$

temos que a representação geométrica do gráfico da função h_2 será o segmento de reta $\{2\} \times [-1\,,2]$.



A figura abaixo ilustra as situações descritas acima:

Portanto temos que encontrar os valores dos extremos das restrições das função f a cada um dos segmentos de reta $\{0\} \times [-1\,,2] \cup \{2\} \cup [-1\,,2] \cup [0\,,2] \times \{-1\} \cup [0\,,2] \times \{2\}$, ou seja, das funções $f \circ g_1\,, f \circ g_2 : [0\,,2] \to \mathbb{R}$ e $f \circ h_1\,, f \circ h_2 : [-1\,,2] \to \mathbb{R}$, com isto finalizamos o item 2. .

Deixaremos esses cálculos como exercício para o leitor.

Para terminar, para encontrarmos o máximo globais da função f no conjunto $[0\,,2] \times [-1\,,2]$, consideramos o maior valor entre todos os valores obtidos nos pontos obtidos nos itens 1. e 2. e o menor valor será o valor mínimo global da função f no conjunto $[0\,,2] \times [-1\,,2]$.

$\boxed{\textbf{F I M}}$